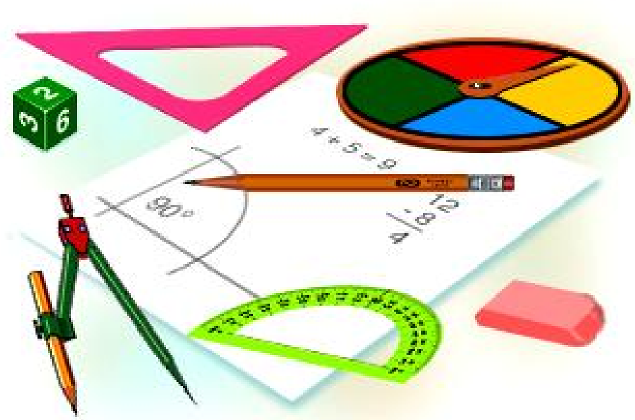
МОУ «СОШ №7»

Практическая часть к билетам по геометрии 9 класс



Учитель:
Зайцева И.А.

г. Ноябрьск

Для заметок

ГЕОМЕТРИЯ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА

В каждом билете три вопроса.

В первом вопросе предлагается сформулировать и доказать терему.

Во втором вопросе дается одно из трех следующих заданий:

а) дать определение понятия, указать его основные свойства или привести примеры;

б) записать формулу и дать ее вывод;

в) привести описание основных этапов построения геометрической фигуры.

Третий вопрос билета – практический, он содержит задачу.

Билет № 1

1. Первый признак равенства треугольников.
2. Параллелограмм. Определение, свойства.
3. Задача по теме «Координаты и векторы» № 144.

Билет № 2

1. Второй признак равенства треугольников.
2. Прямоугольник. Определение, свойства.
3. Задача по теме «Площади плоских фигур» № 132.

Билет № 3

1. Третий признак равенства треугольников.
2. Ромб. Определение, свойства.
3. Задача по теме «Геометрические преобразования» № 109.

Билет № 4

1. Признаки параллельности двух прямых.
2. Окружность. Определение, взаимное расположение прямой и окружности.
3. Задача по теме «Четырехугольники» № 43.

Билет № 5

1. Теорема о сумме внутренних углов треугольника.
2. Касательная к окружности. Определение, свойство.
3. Задача по теме «Площади плоских фигур» № 134.

Билет № 6

1. Теорема о сумме углов выпуклого *n*-угольника.
2. Формула длины окружности. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Треугольники» № 10.

Билет № 7

1. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника.
2. Формула для радиуса окружности, описанной около правильного *n*-угольника. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Четырехугольники» № 47.

Билет № 8

1. Теорема о соотношении между сторонами треугольника (неравенство треугольника).
2. Формула для радиуса окружности, вписанной в правильный *n*-угольник. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Площади плоских фигур» № 124.

Билет № 9

1. Теорема о средней линии треугольника.
2. Формула площади круга. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Геометрические преобразования» № 118.

Билет № 10

1. Теорема о средней линии трапеции.
2. Формулы площади треугольника. Запись, вывод одной из них.
3. Задача по теме «Окружность и круг» № 63.

Билет № 11

1. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
2. Тригонометрические тождества. Примеры, доказательства.
3. Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность» № 26.

Билет № 12

1. Теорема об окружности, вписанной в треугольник.
2. Формула площади трапеции. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Геометрические преобразования» № 111.

Для заметок

Для заметок

Билет № 13
1. Теорема об угле, вписанном в окружность.
2. Формула площади параллелограмма. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Треугольники» № 20.

Билет № 14
1. Признаки параллелограмма.
2. Параллельный перенос. Определение, примеры.
3. Задача по теме «Окружность и круг» № 74.

Билет № 15
1. Теорема Фалеса.
2. Осевая симметрия. Определение, примеры.
3. Задача по теме «Вписанные и описанные многоугольники» № 84.

Билет № 16
1. Теорема Пифагора.
2. Центральная симметрия. Определение, примеры.
3. Задача по теме «Вписанные и описанные многоугольники» № 95.

Билет № 17
1. Теорема синусов.
2. Серединный перпендикуляр. Определение, свойство.
3. Задача по теме «Окружность и круг» № 80.

Билет № 18
1. Теорема косинусов.
2. Биссектриса угла. Определение, свойство.
3. Задача по теме «Координаты и векторы» № 151.

Билет № 19
1. Первый признак подобия треугольников.
2. Построение середины данного отрезка.
3. Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность» № 37.

Билет № 20
1. Второй признак подобия треугольников.
2. Построение биссектрисы данного угла.
3. Задача по теме «Вписанные и описанные многоугольники» № 97.

Билет № 21

1. Третий признак подобия треугольников.
2. Построение угла, равного данному.
3. Задача по теме «Координаты и векторы» №152.

Билет № 22

1. Вывод уравнения прямой,
2. Перпендикулярные прямые. Определение, построение прямой, перпендикулярной данной.
3. Задача по теме «Четырехугольники» № 59.

Билет № 23

1. Вывод уравнения окружности.
2. Равнобедренный треугольник. Определение, свойства.
3. Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность» № 31.

Билет № 24

1. Скалярное произведение двух векторов. Определение, свойства.
2. Вертикальные углы. Определение, свойство.
3. Задача по теме «Треугольники» № 16.

Т.к. высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой, то $DN = \sqrt{KN \cdot NB}$. Отсюда $DN^2 = KN \cdot NB$, а

$$NB = \frac{DN^2}{KN}, \; NB = \frac{6^2}{4{,}5} = \frac{36}{4{,}5} = 8 \text{ (см).}$$

Т.к. $N \in KB$, то $KB = KN + NB$, $KB = 4{,}5 + 8 = 12{,}5$ (см).

Т.к. K – середина AB, то $AB = 2AK$, $AB = 2 \cdot 12{,}5 = 25$ (см).

По теореме Пифагора для прямоугольного $D\ ABC$ с гипотенузой AB имеем: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, отсюда

$$BC^2 = AB^2 - AC^2,$$
$$BC^2 = 25^2 - 15^2,$$
$$BC^2 = 625 - 225,$$
$$BC^2 = 400 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} BC = \sqrt{400}, \\ BC = -\sqrt{400} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} BC = 20, \\ BC = -20. \end{array}\right.$$

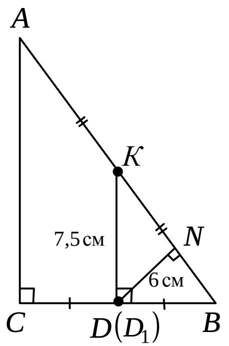
Т.к. длина отрезка выражается положительным числом, то $BC = 20$ см.

Ответ: $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $AC = 15$ см.

Билет № 24, вопрос 3

Задача по теме «Треугольники»

16. Перпендикуляр, опущенный из середины одного катета прямоугольного треугольника на гипотенузу, равен 6 см, а середина гипотенузы отстоит от этого же катета на 7,5 см. Найдите стороны данного треугольника.



Дано: $\Delta\, ABC$ – прямоугольный,
$\angle C = 90°$, $CD = DB$,
$DN \perp AB$, $DN = 6$ см,
$AK = KB$, $KD_1 \perp BC$,
$KD_1 = 7{,}5$ см,

Найти: AB, BC, AC.

Решение

Т.к. K и D – соответственно середины сторон AB и BC, то KD – средняя линия треугольника по определению.

По свойству средней линии $KD \parallel AC$ и $KD = \frac{1}{2}AC$. Отсюда

$$AC = 2\,KD,\ AC = 2 \cdot 7{,}5 = 15 \text{ (см)}.$$

Т.к. $AC \perp BC$ как катеты прямоугольного $\Delta\, ABC$ с $\angle C = 90°$, и т.к. $KD_1 \perp BC$ по условию задачи, то $KD_1 \parallel AC$, потому что два перпендикуляра к одной стороне параллельны.

Получили, что $K \in KD$, $KD \parallel AC$ и $K \in KD_1$, $KD_1 \parallel AC$. А т.к. через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной, то KD и KD_1 совпадают. Значит, точки D и D_1 тоже совпадают.

Т.к. $DN \perp AB$, то $\Delta\, KDN$ – прямоугольный. По теореме Пифагора для $\Delta\, KDN$ имеем: $KD^2 = KN^2 + DN^2$, отсюда

$$KN^2 = KD^2 - DN^2,\ KN^2 = 7{,}5^2 - 6^2,\ KN^2 = 56{,}25 - 36,$$

$$KN^2 = 20{,}25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} KN = \sqrt{20{,}25}, \\ KN = -\sqrt{20{,}25} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} KN = 4{,}5, \\ KN = -4{,}5. \end{array}\right.$$

Т.к. длина отрезка выражается положительным числом, то $KN = 4{,}5$ см.

Билет № 1, вопрос 3

Задача по теме «Координаты вектора»

144. Найдите координаты точки $C(x;\, y)$, если она принадлежит оси абсцисс и одинаково удалена от точек $A(-14;\, 5)$ и $B(3;\, 8)$.

Дано: $C(x;\, y)$, $C \in Ox$, $A(-14;\, 5)$, $B(3;\, 8)$.
Найти: x; y.

Решение

Т.к. точка $C(x;\, y)$ принадлежит оси абсцисс, то $y = 0$, т.е. $C(x;\, 0)$.

Т.к. точка C одинаково удалена от точек A и B, то $CA = CB$, поэтому $CA^2 = CB^2$.

Используя формулу $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, где d – расстояние между точками, получим:

$$CA^2 = (-14 - x)^2 + (5 - 0)^2,$$
$$CB^2 = (3 - x)^2 + (8 - 0)^2.$$

Т.к. равны левые части двух последних равенств, то равны и правые, поэтому

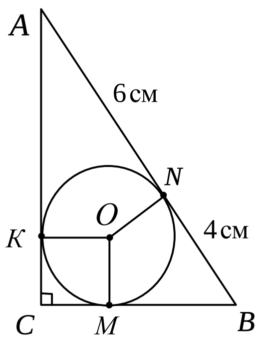
$$(-14 - x)^2 + (5 - 0)^2 = (3 - x)^2 + (8 - 0)^2,$$
$$(14 + x)^2 + 25 = (3 - x)^2 + 64,$$
$$196 + 28x + x^2 + 25 = 9 - 6x + x^2 + 64,$$
$$28x + 6x = 9 + 64 - 196 - 25,$$
$$34x = -148,$$
$$x = -4\tfrac{6}{17}.$$

Ответ: $x = -4\frac{6}{17}$; $y = 0$, т.е. $C(-4\frac{6}{17};\, 0)$.

Билет № 2, вопрос 3

Задача по теме «Площади плоских фигур»

132. Точка касания круга, вписанного в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на части, равные 4 см и 6 см. Найдите площадь этого круга.



Дано: ω(0; r) вписана
в прямоугольный *D ABC*,
$\angle C = 90°$,
M, *N*, *K* – точки касания,
AN = 6 см, *NB* = 4 см.

Найти: $S_{\text{круга}}$.

Решение

Т.к. отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности равны, то *AN* = *AK*= 6 см, *BN* = *BM* = 4 см, *CK* = *KM*.

Т.к. касательные к окружности перпендикулярны радиусам, проведенным в точку касания, то $OK \perp AC$, $OM \perp BC$, где $OK = OM = r$.

Т.к. перпендикуляры, проведенные к одной стороне параллельны, то $OK \parallel MC$, $KC \parallel OM$, поэтому четырехугольник *CKOM* – параллелограмм по определению. В параллелограмме противолежащие стороны равны, поэтому $KC = OM = r$, $OK = MC = r$.

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника *ABC* с гипотенузой *AB* имеем: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, где $AC = (6 + r)$ см, $BC = (4 + r)$ см, $AB = 4 + 6 = 10$ (см). Отсюда $(6 + r)^2 + (4 + r)^2 = 10^2$,

$$36 + 12r + r^2 + 16 + 8r + r^2 = 100,$$
$$2r^2 + 20r - 48 = 0, \ \big| : 2$$
$$r^2 + 10r - 24 = 0.$$

По теореме, обратной теореме Виета: $\left[\begin{array}{l} r = -12, \\ r = 2. \end{array}\right.$

Т.к. длина радиуса выражается положительным числом, то $r = 2$ см.

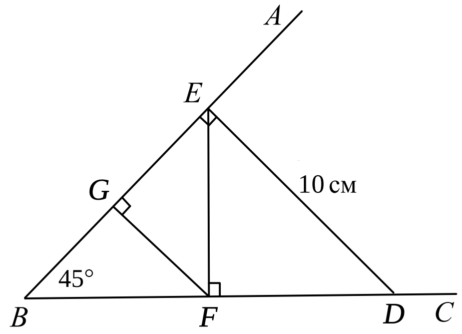
Известно, что $S_{\text{круга}} = \pi r^2$, поэтому $S_{\text{круга}} = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ (см^2).

Ответ: $S_{\text{круга}} = 4\pi$ см^2.

Билет № 23, вопрос 3

Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность»

31. Угол *ABC* равен 45°. На его стороне *BC* взята произвольная точка *D* и проведен $DE \perp BA$ (*E* принадлежит *AB*). Аналогично проведены $EF \perp BC$ и $FG \perp BA$ (*F*, *G* принадлежат соответственно *CB* и *AB*); *DE* = 10 см. Найдите отрезок *FG*.



Дано: $\angle ABC = 45°$, $D \in BC$,
$DE \perp BA$, $E \in BA$,
$EF \perp BC$, $FG \perp BA$,
$F \in BC$, $G \in AB$,
DE = 10 см.

Найти: *FG*.

Решение

Рассмотрим *D BED*.

Т.к. по условию задачи $DE \perp BA$, то $\angle DEB = 90°$, а треугольник *D BED* – прямоугольный. Т.к. сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90° и по условию $\angle ABC = 45°$, то в *D BED* $\angle B = 45°$ и $\angle D = 45°$. Значит, по признаку равнобедренного треугольника *D BED* – равнобедренный с основанием *BD*.

Т.к. $BC \perp EF$ по условию задачи, то *EF* – высота равнобедренного *D BED*, проведенная к основанию *BD*, которая по свойству равнобедренного треугольника высота *EF* является и медианой, поэтому *BF* = *FD*.

Т.к. по условию задачи $FG \perp BA$ и $DE \perp BA$, то $FG \parallel DE$, потому что два перпендикуляра к одной прямой параллельны.

Т.к. *BF* = *FD* и $FG \parallel DE$, то по теореме Фалеса *BG* = *GE*.

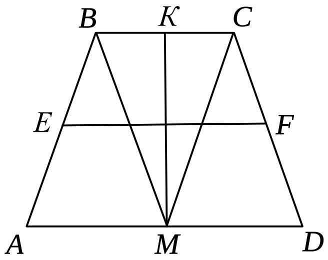
Т.к. *BF* = *FD* и *BG* = *GE*, то отрезок *FG* – средняя линия *D BED* по определению. По свойству средней линии треугольника $FG = \frac{1}{2} DE$, следовательно, *FG* = 5 см.

Ответ: *FG* = 5 см.

Билет № 22, вопрос 3

Задача по теме «Четырехугольники»

59. Докажите, что в равнобедренной трапеции прямые, соединяющие середины противолежащих сторон, перпендикулярны.



Дано: $ABCD$ – равнобедренная трапеция, $BC \parallel AD$, $AB = CD$, E, K, F, M – соответственно середины AB, BC, CD, AD.

Доказать: $MK \perp EF$.

Доказательство

Т.к. E и F – середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, то EF – средняя линия трапеции по определению. По свойству средней линии $EF \parallel AD \parallel BC$.

Проведем отрезки BM и CM.

Рассмотрим получившиеся треугольники ABM и DCM.

$AB = CD$ по условию задачи. $\angle A = \angle D$ как углы при основании равнобедренной трапеции. $AM = MD$, т.к. M – середина AD. Следовательно, D ABM = D DCM по I признаку равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $BM = CM$.

Рассмотрим D BMC.

$BM = CM$ по доказанному, поэтому D BMC – равнобедренный по определению. Т.к. по условию K – середина BC, то отрезок MK – медиана D BMC, а значит и высота, поэтому $MK \perp BC$.

Прямая, перпендикулярная одной из параллельных прямых, будет перпендикулярна и второй прямой, поэтому т.к. $MK \perp BC$, а $BC \parallel EF$, то $MK \perp EF$.

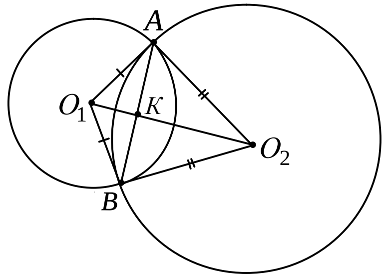
Итак, в равнобедренной трапеции прямые, соединяющие середины противолежащих сторон, перпендикулярны.

Ч.т.д.

Билет № 3, вопрос 3

Задача по теме «Геометрические преобразования»

109. Докажите, что точки пересечения двух окружностей симметричны относительно прямой, соединяющей их центры.



Дано: $\omega_1(O_1; r_1)$, $\omega_2(O_2; r_2)$, $\omega_1 \cap \omega_2 = A; B$.

Доказать: $A_1 = S_{O_1O_2}(A)$.

Доказательство

Рассмотрим D O_1AO_2 и D O_1BO_2.

$O_1A = O_1B = r_1$; $O_2A = O_2B = r_2$; O_1O_2 – общая.

Следовательно, D O_1AO_2 = D O_1BO_2 по III признаку равенства треугольников (по трем сторонам). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$.

Рассмотрим D AO_1B.

Т.к. $O_1A = O_1B = r_1$, то D AO_1B – равнобедренный.

Т.к. $\angle AO_1O_2 = \angle BO_1O_2$ по доказанному выше, то O_1K – биссектриса D AO_1B, проведенная к основанию AB, поэтому O_1K является медианой и высотой, т.е. $BK = KA$, $O_1K \perp AB$.

Итак, O_1, K, O_2 лежат на одной прямой, O_1O_2 проходит через точку K – середину отрезка AB и перпендикулярна к нему. Следовательно, по определению осевой симметрии $A_1 = S_{O_1O_2}(A)$.

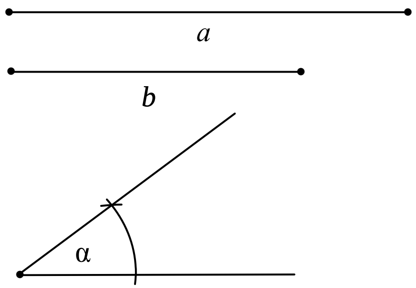
Ч.т.д.

Билет № 4, вопрос 3

Задача по теме «Четырехугольники»

43. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.

Дано:



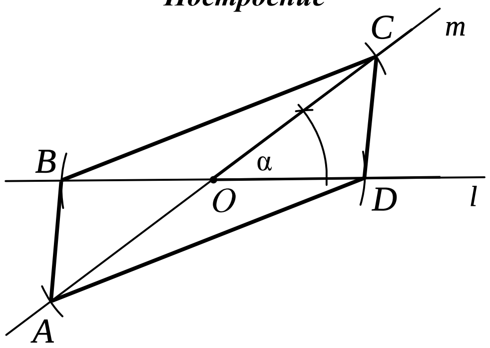
Построить: параллелограмм $ABCD$ так, что $AC = a$, $BD = b$, $\angle COD = \alpha$.

Решение

Анализ. Допустим, что искомый параллелограмм $ABCD$ построен и в нем $AC = a$, $BD = b$, $\angle COD = \alpha$.

Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются под углом α и точкой пересечения делятся пополам, поэтому построение параллелограмма можно провести по следующему плану: сначала построить прямые m и l, угол между которыми равен углу α. Затем от O – точки пересечения прямых m и l отложить отрезки на прямой l, равные $\frac{1}{2}a$, а на прямой m, равные $\frac{1}{2}b$. Концы отложенных от точки O отрезков будут вершинами искомого параллелограмма.

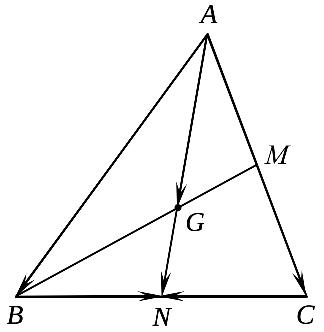
Построение



Билет № 21, вопрос 3

Задача по теме «Координаты вектора»

152. Дан треугольник ABC и точка G – точка пересечения его медиан. Докажите, что $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.



Дано: D ABC,
AN, BM – медианы,
$AN \cap BM = G$.

Доказать: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.

Доказательство

По правилу треугольника сложения двух векторов

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \text{ и } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}.$$

Сложив эти равенства, получим $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AC}$.

Т.к. AN – медиана D ABC, то точка N – середина стороны BC. Значит, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{CN}$ – противоположные векторы, поэтому их сумма равна нулю. Отсюда $2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

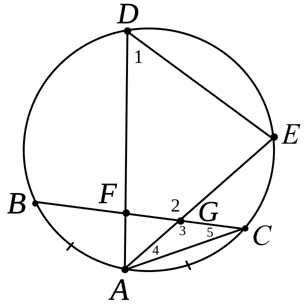
Т.к. медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины, то $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{GN}} = \frac{2}{1}$, поэтому $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$. Значит, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$, отсюда $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Ч.т.д.

Билет № 20, вопрос 3

Задача по теме «Многоугольники. Вписанные и описанные четырехугольники»

97. Через точку A – середину дуги BC, проведены две хорды AD и AE, пересекающие хорду BC в точках соответственно F и G. Докажите, что четырехугольник $DFGE$ можно вписать в окружность.



Дано: $\cup BC$, A – середина $\cup BC$,
AD, AE – хорды,
$AD \cap BC = F$,
$AE \cap BC = D$.

Доказать: что четырехугольник $DFGE$ можно вписать в окружность.

Доказательство

Проведем хорду AC и введем следующие обозначения: $\angle ADE = \angle FDE = \angle 1$, $\angle BGE = \angle FGE = \angle 2$, $\angle AGC = \angle 3$, $\angle EAC = \angle GAC = \angle 4$, $\angle BCA = \angle GCA = \angle 5$.

Известно, что четырехугольник можно вписать в окружность только тогда, когда сумма его противолежащих углов равна 180°, поэтому докажем, например, что в четырехугольнике $DFGE$ $\angle D + \angle G = 180°$.

По теореме о сумме углов треугольника в $D\,AGC$

$$\angle 3 = 180° - (\angle 4 + \angle 5).$$

По теореме о вписанном угле

$$\angle 4 = \tfrac{1}{2}\cup EC,\ \angle 5 = \tfrac{1}{2}\cup AB,\ \angle 1 = \tfrac{1}{2}\cup AE.$$

Значит, $\angle 3 = 180° - (\frac{1}{2}\cup EC + \frac{1}{2}\cup AB)$.

Т.к. точка A – середина $\cup BC$, то $\cup AB = \cup AC$, поэтому

$$\angle 3 = 180° - (\tfrac{1}{2}\cup EC + \tfrac{1}{2}\cup AC),\ \angle 3 = 180° - \tfrac{1}{2}\cup AE.$$

Т.к. $\angle 2 = \angle 3$ как вертикальные, то $\angle 2 = 180° - \frac{1}{2}\cup AE$.

Таким образом, $\angle D + \angle G = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\cup AE + 180° - \frac{1}{2}\cup AE = 180°$.

Итак, в четырехугольнике $DFGE$ сумма противолежащих углов равна 180°, поэтому его можно вписать в окружность.

Ч.т.д.

1) прямая l, точка $O \in l$;
2) прямая m, $\angle(m, l) = \alpha$, $m \cap l = O$;
3) $\omega(O;\ \frac{1}{2}a)$, $\omega(O;\ \frac{1}{2}a) \cap m = B, D$;
4) $\omega(O;\ \frac{1}{2}b)$, $\omega(O;\ \frac{1}{2}b) \cap m = A, C$;
5) отрезки AB, BC, CD, AD;
$ABCD$ – искомый параллелограмм.

Доказательство

В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам: $AC \cap BD = O$, $AO = OC = \frac{1}{2}b$, $BO = OD = \frac{1}{2}a$ по построению. Значит, по признаку параллелограмма четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

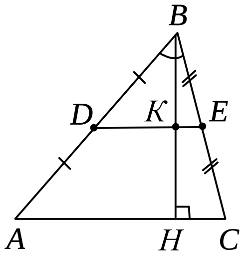
Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

Билет № 5, вопрос 3

Задача по теме «Площади плоских фигур»

134. Найдите отношение, в котором находятся площади треугольника и четырехугольника, на которые рассекается данный треугольник своей средней линией.



Дано: $D\ ABC$, $D \in BC$, $E \in BC$, DE – средняя линия.

Найти: $\dfrac{S_{DBE}}{S_{ADEC}}$.

Решение

Рассмотрим $D\ DBE$ и $D\ ABC$.

Т.к. DE – средняя линия $D\ ABC$, то $DB = \frac{1}{2}AB$, $BE = \frac{1}{2}BC$; $\angle B$ – общий. Следовательно, $D\ DBE \sim D\ ABC$ по признаку подобия треугольников (по двум пропорциональным сторонам и равному углу, заключенному между ними) с коэффициентом подобия равным $\frac{1}{2}$.

Т.к. в подобных треугольниках соответствующие высоты пропорциональны, то $BK = \frac{1}{2}BH$, где BK – высота $D\ DBE$, а BH – высота $D\ ABC$.

Т.к. площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, то $S_{DBE} = \frac{1}{2}DE \times BK$.

Т.к. по свойству средней линии $DE = \frac{1}{2}AC$, а по выше изложенному $BK = \frac{1}{2}BH$, то $S_{DBE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AC \cdot \frac{1}{2}BH = \frac{1}{8}AC \cdot BH$.

Т.к. площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту, то $S_{ADEC} = \dfrac{DE + AC}{2} \cdot KH$.

Т.к. $BK = \frac{1}{2}BH$, то $KH = \frac{1}{2}BH$, поэтому

$$S_{ADFC} = \frac{\frac{1}{2}AC + AC}{2} \cdot \frac{1}{2}BH = \frac{\frac{3}{2}AC}{2} \cdot \frac{1}{2}BH = \frac{3}{8}AC \cdot BH.$$

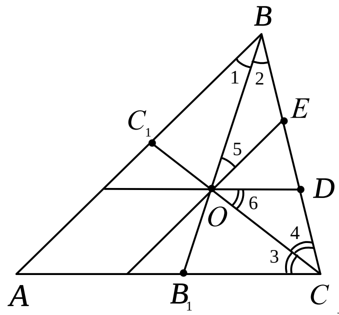
Значит, $\dfrac{S_{DBE}}{S_{ADEC}} = \dfrac{\frac{1}{8}AC \cdot BH}{\frac{3}{8}AC \cdot BH} = \frac{1}{8} : \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{S_{DBE}}{S_{ADEC}} = \dfrac{1}{3}$.

Билет № 19, вопрос 3

Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность»

37. В треугольнике ABC биссектрисы внутренних углов B и C пересекаются в точке O. Через эту точку проведена прямая OD параллельно AC до пересечения с BC в точке D и прямая OE параллельно AB до пересечения с BC в точке E. Докажите, что периметр треугольника OED равен длине стороны BC.



Дано: $D\ ABC$, BB_1, CC_1 – биссектрисы углов B и C, $BB_1 \cap CC_1 = O$, $OD \parallel AC$, $OE \parallel AB$, $D, E \in BC$.

Доказать: $P_{D\ OED} = BC$.

Доказательство

Т.к. в $D\ ABC$ BB_1 – биссектриса $\angle B$, то $\angle 1 = \angle 2$. Т.к. $OE \parallel AB$, то $\angle 1 = \angle 5$ как внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых OE и AB секущей BB_1. Отсюда $\angle 2 = \angle 5$, а $D\ BEO$ – равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Значит, $BE = OE$.

Т.к. в $D\ ABC$ CC_1 – биссектриса $\angle C$, то $\angle 3 = \angle 4$. Т.к. $OD \parallel AC$, то $\angle 3 = \angle 6$ как внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых OD и AC секущей CC_1. Отсюда $\angle 4 = \angle 6$, а $D\ CDO$ – равнобедренный по признаку равнобедренного треугольника. Значит, $CD = OD$.

Т.к. периметр треугольника равен сумме длин его сторон, то $P_{D\ OED} = OE + ED + OD$.

Т.к. $BE = OE$ и $CD = OD$, то $P_{D\ OED} = BE + ED + DC = BC$.

Итак, $P_{D\ OED} = BC$.

Ч.т.д.

Билет № 18, вопрос 3

Задача по теме «Координаты вектора»

151. Даны векторы $\vec{a}\{-4;\ 12\}$ и $\vec{b}\{x;\ -6\}$. Найдите значение x, при котором данные векторы будут перпендикулярны.

Дано: $\vec{a}\{-4;\ 12\}$, $\vec{b}\{x;\ -6\}$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Найти: x.

Решение

Ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Если $\vec{a}\{-4;\ 12\}$, $\vec{b}\{x;\ -6\}$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $-4x + 12(-6) = 0$.

$$-4x - 72 = 0,$$
$$-4x = 72,$$
$$x = 72 : (-4),$$
$$x = -18.$$

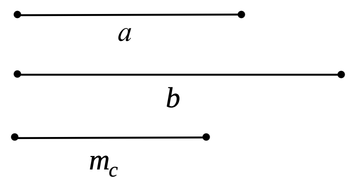
Ответ: $\vec{a}\perp\vec{b}$ при $x = -18$.

Билет № 6, вопрос 3

Задача по теме «Треугольники»

10. Постройте треугольник по двум его сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

Дано:



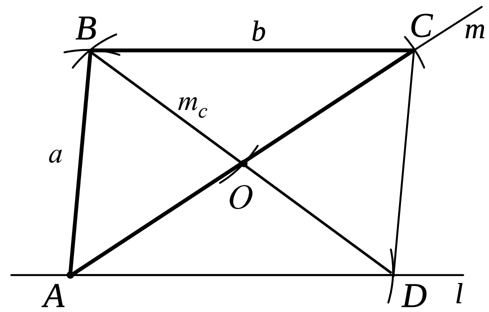
Построить: D ABC так, что $AB = a$, $BC = b$, $BO = m_c$.

Решение

Анализ. Допустим, что искомый D ABC построен и в нем $AB = a$, $BC = b$, $BO = m_c$.

Достроим D ABC до параллелограмма $ABCD$ и проведем диагональ BD. По свойствам параллелограмма $BD = 2BO = 2m_c$, $BC = AD = b$, поэтому построение параллелограмма можно провести по следующему плану: сначала построить D ABD по трем сторонам $AB = a$, $AD = b$, $BD = 2m_c$. Затем на продолжении отрезка AO за точку O – середину отрезка BD, отложить отрезок $OC = AO$. D ABC будет искомым.

Построение



1) прямая l, точка $A \in l$;

2) D ABD, $AB = a$, $AD = b$, $DB = 2m_c$:

а) $\omega(A;\ b)$, $\omega(A;\ b) \cap l = D$;

б) $\omega(A;\ a)$;

в) $\omega(D;\ 2m_c)$, $\omega(D;\ 2m_c) \cap \omega(A;\ a) = B$;

г) отрезки AB и BD;

3) O – середина BD: $\omega(B;\ m_c) \cap BD = O$;

4) $OC \subset AO$, $OC = AO$:

$\omega(O;\ OA)$, $\omega(O;\ OA) \cap AO = A, C$;

5) отрезок BC;

D ABC – искомый.

Доказательство

Проведем отрезок CD.

Рассмотрим получившийся четырехугольник $ABCD$. Его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам: $AC \cap BD = O$, $AO = OC$, $BO = OD = m_c$ по построению. Значит, по признаку параллелограмма четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. В параллелограмме противолежащие стороны равны, поэтому $BC = AD = b$.

Итак, в D ABC $AB = a$, $BO = m_c$ по построению, $BC = b$ по доказанному, следовательно, D ABC – искомый.

Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение, если каждый из отрезков a, b, $2m_c$ меньше суммы двух других.

$$KO_1^{\,2} = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} KO_1 = \sqrt{8}, \\ KO_1 = -\sqrt{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} KO_1 = 2\sqrt{2}, \\ KO_1 = -2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Т.к. длина отрезка выражается положительным числом, то $KO_1 = 2\sqrt{2}$ см.

Рассмотрим D O_1CK.

Т.к. касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания, то $O_1C \perp KC$, поэтому D O_1CK – прямоугольный с гипотенузой KO_1.

Т.к. синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе, то $\sin\angle O_1KC = \dfrac{O_1C}{O_1K}$, $\sin\angle O_1KC = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\angle O_1CK = 45°$.

Т.к. отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности, то

$$\angle BKC = \angle O_1KC + \angle O_1KB = 2\angle O_1KC,$$

$$\angle BKC = 2 \cdot 45° = 90°.$$

Ответ: $\angle BKC = 90°$.

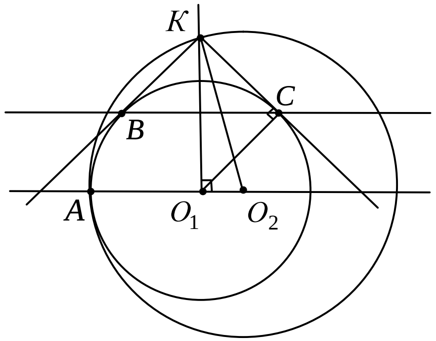
Билет № 17, вопрос 3

Задача по теме «Окружность и круг»

80. Две окружности, радиусы которых равны 2 см и 3 см, внутренне касаются. Из центра меньшей окружности проведен луч, перпендикулярный линии центров, который пересекает большую окружность, и из точки пересечения проведены две касательные к меньшей окружности. Найдите угол между касательными.

Дано: $\omega(O_1; r_1)$, $\omega(O_2; r_2)$, $r_1 = 2$ см, $r_2 = 3$ см,
$\omega(O_1; r_1) \cap \omega(O_2; r_2) = A$,
A – внутренняя точка касания окружностей,
луч $O_1K \perp O_1O_2$, $O_1K \cap \omega(O_2; r_2) = K$,
KB и KC – касательные к $\omega(O_1; r_1)$,
B и C – точки касания.

Найти: $\angle BKC$.



Решение

Рассмотрим D O_1O_2K.

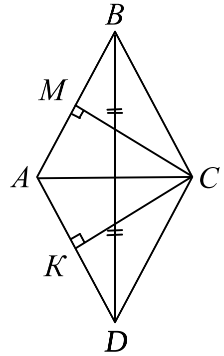
Т.к. луч $O_1K \perp O_1O_2$, то D O_1O_2K – прямоугольный с гипотенузой KO_2. Т.к. $O_1A = r_1 = 2$ см и $O_2A = r_2 = 3$ см, то $O_1O_2 = O_2A - O_1A$, $O_1O_2 = 3 - 2 = 1$ (см). Тогда по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника D O_1O_2K с гипотенузой KO_2 имеем:

$$KO_2^2 = KO_1^2 + O_1O_2^2,$$
$$KO_1^2 = KO_2^2 - O_1O_2^2,$$
$$KO_1^2 = 3^2 - 1^2,$$
$$KO_1^2 = 9 - 1,$$

Билет № 7, вопрос 3

Задача по теме «Четырехугольники»

47. Высоты, проведенные из вершины ромба, образуют угол 30°. Найдите углы: а) ромба; б) которые образуют диагонали с его сторонами.



Дано: $ABCD$ – ромб, CM, CK – высоты, $\angle MCK = 30°$.

Найти: углы ромба; углы, которые образуют диагонали с его сторонами.

Решение

Рассмотрим D CAM и D CAK.

Т.к. CM и CK высоты ромба, то D CAM и D CAK – прямоугольные. Т.к. диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то $\angle CAM = \angle CAK$. AC – общая сторона. Следовательно, D CAM = D CAK по признаку равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и острому углу). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $\angle ACM = \angle ACK$, $\angle CAM = \angle CAK$.

Т.к. по условию задачи $\angle MCK = 30°$, а $\angle MCK = \angle ACM + \angle ACK$, то $\angle ACM = \angle ACK = \angle MCK : 2 = 30° : 2 = 15°$.

Т.к. сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°, то $\angle CAM = \angle CAK = 90° - 15° = 75°$, а в ромбе $ABCD$ $\angle A = \angle CAM + \angle CAK = 75° + 75° = 150°$.

Т.к. в ромбе противолежащие стороны параллельны, то $BC \parallel AD$, а $\angle A + \angle B = 180°$ как внутренние односторонние углы, образованные при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AB. Значит, $\angle B = 180° - \angle A$, $\angle B = 180° - 150° = 30°$.

Т.к. в ромбе противолежащие углы равны, то $\angle C = \angle A = 150°$, а $\angle D = \angle B = 30°$.

Т.к. диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то

$$\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA = 150° : 2 = 75°, \text{ а}$$

$$\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = \angle CDB = 30°: 2 = 15°.$$

Ответ: в ромбе $ABCD$ $\angle A = \angle C = 150°$, $\angle B = \angle D = 30°$,
$\angle BAC = \angle DAC = \angle BCA = \angle DCA = 75°$,
$\angle ABD = \angle CBD = \angle ADB = = \angle CDB = 15°$.

Т.к. $BH_1 = 2r$, где r – радиус вписанного в трапецию круга, то

$$r = \frac{1}{2} BH_1,\ r = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Т.к. в прямоугольном треугольнике ABH_1 $\sin\angle A = \frac{BH_1}{AB}$, то

$$\sin\angle A = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ то } \angle A = 60°.$$

Т.к. в трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, то $\angle A + \angle B = 180°$ как внутренние односторонние углы, образованные при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AB. Значит,

$$\angle B = 180° - \angle A,\ \angle B = 180° - 60° = 120°.$$

Т.к. равнобедренной трапеции углы при основаниях равны, то

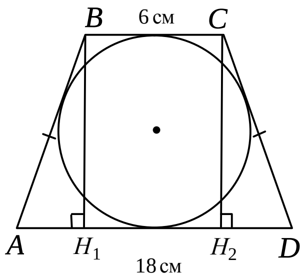
$$\angle D = \angle A = 60°,\ \angle C = \angle B = 120°.$$

Ответ: $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$, $r = 3\sqrt{3}$ см.

Билет № 16, вопрос 3

Задача по теме «Многоугольники. Вписанные и описанные четырехугольники»

95. В равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 см и 6 см, вписан круг. Найдите его радиус и углы трапеции.



Дано: $ABCD$ – равнобедренная трапеция,
$BC \parallel AD$, $AB = CD$,
$AD = 18$ см, $BC = 6$ см,
в трапецию вписан круг.

Найти: радиус круга и углы трапеции.

Решение

Т.к. в любом описанном четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в равнобедренной трапеции $ABCD$ $AB + CD = BC + AD$, отсюда $AB = CD = (18 + 6) : 2 = 12$ (см).

Проведем высоты трапеции BH_1 и BH_2.

Рассмотрим получившиеся прямоугольные треугольники ABH_1 и DCH_2. $AB = CD$ по условию задачи, $BH_1 = BH_2$ как расстояния между параллельными прямыми BC и AD. Следовательно, $D\ ABH_1 = D\ DCH_2$ по признаку равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и катету). В равных треугольниках соответствующие элементы равны, поэтому $AH_1 = DH_2$.

Рассмотрим четырехугольник BCH_2H_1. $BC \parallel AD$, поэтому $BC \parallel H_1H_2$. $BH_1 \parallel BH_2$ как перпендикуляры, проведенные к одной стороне. Следовательно, четырехугольник BCH_2H_1 – параллелограмм по определению. В параллелограмме противолежащие стороны равны, поэтому $BC = H_1H_2 = 6$ см. Значит,

$$AH_1 = DH_2 = (AD - H_1H_2) : 2,\ AH_1 = (18 - 6) : 2 = 6 \text{ (см)}.$$

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABH_1 с гипотенузой AB имеем: $AB^2 = AH_1^2 + BH_1^2$, отсюда

$$BH_1^2 = AB^2 - AH_1^2,\ BH_1^2 = 12^2 - 6^2,\ BH_1^2 = 144 - 36,$$

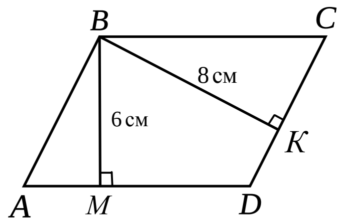
$$BH_1^2 = 108 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} BH_1 = \sqrt{108}, \\ BH_1 = -\sqrt{108} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} BH_1 = 6\sqrt{3}, \\ BH_1 = -6\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Т.к. длина отрезка выражается положительным числом, то $BH_1 = 6\sqrt{3}$ см.

Билет № 8, вопрос 3

Задача по теме «Площади плоских фигур»

124. Найдите площадь параллелограмма, периметр которого равен 42 см, а высоты равны 8 см и 6 см.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм,
$P_{ABCD} = 42$ см,
BM, BK – высоты,
$BK = 8$ см, $BM = 6$ см.

Найти: S_{ABCD}.

Решение

Т.к. в параллелограмме противолежащие стороны равны, то

$$P_{ABCD} = (AD + DC) \cdot 2.$$

Т.к. по условию задачи $P_{ABCD} = 42$ см, то

$$(AD + DC) \cdot 2 = 42,$$
$$AD + DC = 21,$$
$$AD = 21 - DC.$$

Т.к. площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведенную к этому основанию, то

$$S_{ABCD} = DC \cdot BK = AD \cdot BM.$$

Учитывая, что $BK = 8$ см, $BM = 6$ см, $AD = 21 - DC$, получаем:

$$DC \cdot 8 = (21 - DC) \cdot 6,$$
$$8DC = 126 - 6DC,$$
$$8DC + 6DC = 126,$$
$$14DC = 126,$$
$$DC = 126 : 14,$$
$$DC = 9.$$

Значит, $S_{ABCD} = DC \cdot BK$, $S_{ABCD} = 9 \cdot 8 = 72$ (см^2).

Ответ: $S_{ABCD} = 72$ см^2.

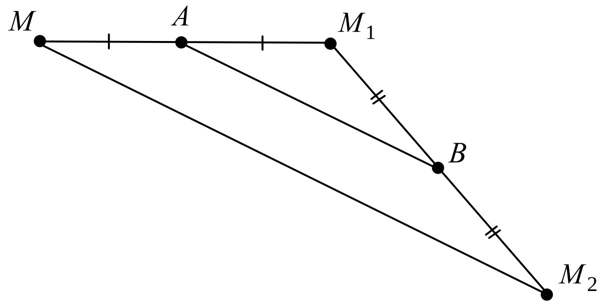
Билет № 9, вопрос 3

Задача по теме «Геометрические преобразования»

118. Произвольная точка M симметрична точке M_1 относительно точки A. Точка M_1 симметрична точке M_2 относительно точки B. Докажите, что отрезок MM_2 имеет постоянную длину, т.е. не зависит от выбора точки M.

Дано: $M_1 = Z_A\,(M)$, $M_2 = Z_B\,(M_1)$.

Доказать: MM_2 имеет постоянную длину, т.е. не зависит от выбора точки M.



Доказательство

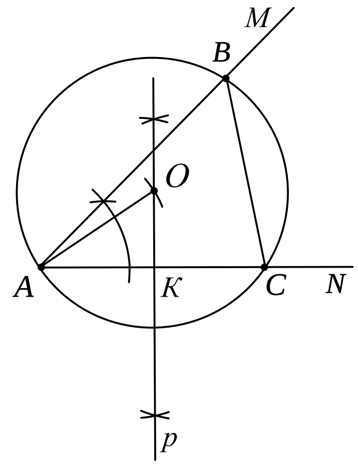
Рассмотрим D MM_1M_2.

Т.к. по условию задачи $M_1 = Z_A\,(M)$, $M_2 = Z_B\,(M_1)$, то по определению симметрии относительно точки $MA = AM_1$, $M_1B = BM_2$. Значит, AB – средняя линия треугольника MM_1M_2 по определению.

По свойству средней линии треугольника $AB = \frac{1}{2}\,MM_2$, поэтому $MM_2 = 2AB$.

Таким образом, MM_2 имеет постоянную длину, то есть не зависит от выбора точки M.

Ч.т.д.



Доказательство

D ABC – искомый, т.к. $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, а $\omega(O;\,R)$ описана около D ABC.

Ч.т.д.

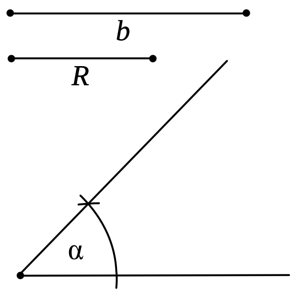
Исследование. Задача имеет единственное решение, если $AC < 2R$.

Билет № 15, вопрос 3

Задача по теме «Многоугольники. Вписанные и описанные четырехугольники»

84. Постройте треугольник ABC по стороне $AC = b$, углу A и радиусу R описанной окружности.

Дано:



Построить: $D\ ABC$ так, что $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $OA = R$.

Решение

Анализ. Допустим, что искомый $D\ ABC$ построен и в нем $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $OA = R$.

Построение $D\ ABC$ можно провести по следующему плану: сначала построить угол, равный углу α. Затем на одной стороне угла от его вершины отложить отрезок $AC = b$. Т.к. центр окружности, описанной около треугольника, находится на серединном перпендикуляре к сторонам треугольника, то построить серединный перпендикуляр p к стороне AC и на нем найти точку O, равноудаленную от точек A и C на расстояние R. $D\ ABC$ будет искомым.

Построение

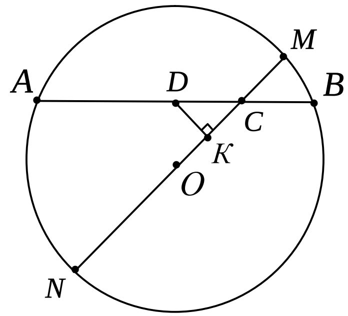
1) прямая l, точка $A \in l$;
2) $\angle MAN = \alpha$;
3) $AC = b$, $C \in AN$;
4) $p \perp AC$, $p \cap AC = K$, $AK = KC$;
5) $\omega(A;\ R) \cap p = O$;
6) $\omega(O;\ R)$, $\omega(O;\ R) \cap AM = B$;
7) отрезок BC;

$D\ ABC$ – искомый.

Билет № 10, вопрос 3

Задача по теме «Окружность и круг»

63. Хорда окружности пересекает ее диаметр под углом 30° и делится им на части, равные 12 см и 6см. Найдите расстояние от середины хорды до диаметра.



Дано: $\omega(O;\ r)$, AB – хорда,
MN – диаметр, $AB \cap MN = C$,
$AC = 12$ см, $CB = 6$ см,
$\angle ACN = 30°$, $D \in AB$,
$AD = DB$, $DK \perp MN$, $K \in MN$.

Найти: DK.

Решение

Т.к. $C \in$ AB, то $AB = AC + CB$, $AB = 12 + 6 = 18$ (см).

Т.к. D – середина хорды AB, то $AD = DB = \frac{1}{2}AB$. Отсюда

$$AD = DB = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \text{ (см)}.$$

Т.к. $D \in AC$, то $AC = AD + DC$. Отсюда

$$DC = AC - AD,\ DC = 12 - 9 = 3 \text{ (см)}.$$

Рассмотрим $D\ DCK$.

Т.к. $DK \perp MN$, то $D\ DCK$ – прямоугольный. $\angle ACN = 30°$, поэтому $\angle DCK = 30°$. Т.к. катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы, то

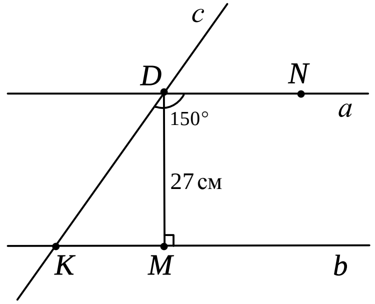
$$DK = \frac{1}{2}DC,\ DK = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5 \text{ (см)}.$$

Ответ: $DK = 1{,}5$ см.

Билет № 11, вопрос 3

Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность»

26. Прямая, пересекающая две параллельные прямые, образует с одной из них угол в 150°. Найдите отрезок секущей, заключенный между этими прямыми, если расстояние между двумя параллельными прямыми равно 27 см.



Дано: $a \parallel b$, c – секущая,
$a \cap c = D$, $a \cap b = K$,
$\angle KDN = 150°$,
$DM \perp b$, $DM = 27$ см.

Найти: DK.

Решение

Т.к. $a \parallel b$, то $\angle MKD + \angle KDN = 180°$ как внутренние односторонние углы, образованные при пересечении параллельных прямых a и b секущей c. Отсюда $\angle MKD = 180° - \angle KDN$, $\angle MKD = 180° - 150° = 30°$.

Рассмотрим D KDM.

Т.к. DM – расстояние между параллельными прямыми a и b, то $DM \perp b$, поэтому D KDM – прямоугольный. $\angle MKD = 30°$, а т.к. катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы, то $DM = \frac{1}{2}DK$. Отсюда $DK = 2DM$, $DK = 2 \cdot 27 = 54$ (см).

Ответ: $DK = 54$ см.

Т.к. $O_2A = O_2C = r_2$ как радиусы одной окружности, то D O_2AC – равнобедренный по определению, а $\angle 3 = \angle 4$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

Т.к. $\angle 3 = \angle 6$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых O_2B и AK секущей AC и $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle 4 = \angle 6$.

Т.к. $\angle O_1AO_2$ – развернутый, то $\angle 2 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 4 = 180°$.

Т.к. $\angle 2 = \angle 5$, а $\angle 4 = \angle 6$, то $2(\angle 5 + \angle 6) = 180°$, отсюда $\angle BAC = \angle 5 + \angle 6 = 180° : 2 = 90°$.

Т.к. окружность проходит через точки A, B и C, то $\angle BAC$ – вписанный и равен 90°, поэтому он опирается на диаметр BC, равный a. Значит, радиус окружности, проходящей через точки A, B и C, равен $\frac{a}{2}$.

Ответ: $\frac{a}{2}$.

Билет № 14, вопрос 3

Задача по теме «Окружность и круг»

74. Две окружности внешне касаются в точке A, B и C – точки касания их внешней касательной, отрезок $BC = a$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, B и C.

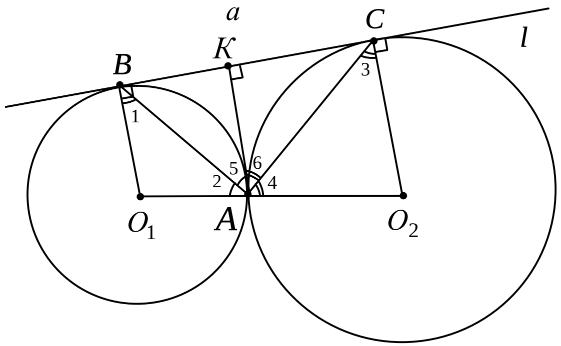
Дано: $\omega(O_1; r_1)$, $\omega(O_2; r_2)$,

A – внешняя точка касания окружностей,

B и C – точки касания их внешней касательной l,

$BC = a$.

Найти: радиус окружности, проходящей через точки A, B и C.



Решение

Т.к. касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, то $O_1B \perp l$, $O_2C \perp l$.

Из точки A – внешней точки касания окружностей, проведем перпендикуляр AK к прямой l.

Т.к. перпендикуляры, проведенные к одной прямой параллельны, то $O_1B \parallel AK \parallel O_2C$.

Т.к. $O_1A = O_1B = r_1$ как радиусы одной окружности, то D O_1AB – равнобедренный по определению, а $\angle 1 = \angle 2$ как углы при основании равнобедренного треугольника.

Т.к. $\angle 1 = \angle 5$ как накрест лежащие углы, образованные при пересечении параллельных прямых O_1B и AK секущей AB и $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 2 = \angle 5$.

Билет № 12, вопрос 3

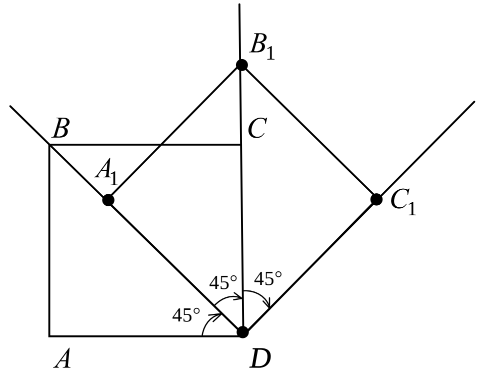
Задача по теме «Геометрические преобразования»

111. Постройте фигуру, в которую перейдет квадрат $ABCD$ при повороте вокруг точки D по часовой стрелке на угол 45°.

Дано: квадрат $ABCD$, $R_D^{-45°}$.

Построить: фигуру, в которую перейдет квадрат $ABCD$ при $R_D^{-45°}$.

Построение



Анализ. Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что $OM = OM_1$ и $\angle MOM_1 = \alpha$.

Пользуясь определением поворота, построим фигуру, в которую переходит квадрат $ABCD$ при $R_D^{-45°}$ (повороте вокруг точки D по часовой стрелке на угол 45°).

Построение. 1) $D = R_D^{-45°}(D)$; 2) $A_1 = R_D^{-45°}(A)$; 3) $B_1 = R_D^{-45°}(B)$; 4) $C_1 = R_D^{-45°}(C)$; 5) соединим точки D, A_1, B_1, C_1.

Четырехугольник $A_1B_1C_1D$ – искомый.

Доказательство. Т.к. поворот является движением, то при данном повороте квадрат $ABCD$ отображается на равный ему квадрат $A_1B_1C_1D$.

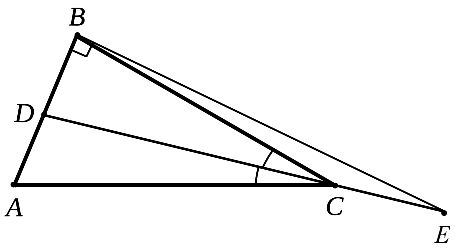
Ч.т.д.

Исследование. Задача имеет единственное решение.

Билет № 13, вопрос 3

Задача по теме «Треугольники»

20. В треугольнике ABC известны все стороны: AB = 13 см, BC = 14 см, AC = 15 см. К стороне AB через вершину B проведен перпендикуляр, который пересекает продолжение биссектрисы CD в точке E. Найдите BE.



Дано: D ABC, AB = 13 см, BC = 14 см, AC = 15 см, $BE \perp AB$, CD – биссектриса, $BE \cap CD = E$.

Найти: BE.

Решение

По теореме косинусов для D ABC

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot cos\angle C,$$
$$2BC \cdot AC \cdot cos\angle C = BC^2 + AC^2 - AB^2,$$
$$cos\angle C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC},$$
$$cos\angle C = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{196 + 225 - 169}{420} = \frac{252}{420} = 0{,}6.$$

Т.к. $cos\angle C$ = 0,6000, то по таблице Брадиса $\angle C \approx 53°08'$.

Пояснение. По таблице Брадиса если $cos\,a \approx 0{,}6004$, то угол $a \approx 53°06'$. Т.к. $cos\angle C$ меньше $cos\,a$ на 0,0004, то $\angle C$ больше угла a на $2'$, т.е. $\angle C \approx 53°08'$.

Т.к. в D ABC CD – биссектриса $\angle C$, то $\angle BCD = 53°8' : 2 = 26°34'$.

По теореме косинусов для D ABC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot cos\angle B,$$
$$2AB \cdot BC \cdot cos\angle B = AB^2 + BC^2 - AC^2,$$
$$cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC},$$
$$cos\angle B = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{169 + 196 - 225}{364} = \frac{140}{364} \approx 0{,}3846.$$

Т.к. $cos\angle B$ = 0,3846, то по таблице Брадиса $\angle B \approx 53°8'$.

Пояснение. По таблице Брадиса если $cos\,a \approx 0{,}3843$, то угол $a \approx 67°24'$. Т.к. $cos\angle B$ больше $cos\,a$ на 0,0003, то $\angle B$ меньше угла a на $1'$, т.е. $\angle B \approx 67°23'$.

Т.к. сумма внутренних углов треугольника равна 180°, то в D BDC $\angle BDC = 180° - (\angle BCD + \angle DBC)$,

$\angle BDC \approx 180° - (26°34' + 67°23') \approx 179°60' - 93°57' \approx 86°03'$.

По теореме синусов для D BDC $\dfrac{BC}{sin\angle BDC} = \dfrac{BD}{sin\angle BCD}$,

$$BD = \frac{BC \cdot sin\angle BCD}{sin\angle BDC},$$
$$BD \approx \frac{14 \cdot sin\,26°34'}{sin\,86°03'} \approx \frac{14 \cdot 0{,}4473}{0{,}9976} \approx \frac{6{,}2622}{0{,}9976} \approx 6{,}28 \text{ (см)}.$$

Пояснение. По таблице Брадиса $sin26°36' \approx 0{,}4478$. Т.к. угол $\angle BCD$ меньше угла $26°36'$ на $2'$, то $sin26°34'$ меньше $sin26°36'$ на 0,0005, т.е. $sin26°34' \approx 0{,}4473$.

Пояснение. По таблице Брадиса $sin86°00' \approx 0{,}9976$. Хотя угол $\angle BDC$ больше угла $86°00'$ на $3'$, $sin86°03' = sin86°00'$, т.к. поправка равна 0, т.е. $sin86°03' \approx 0{,}9976$.

Т.к. по условию задачи $BE \perp AB$, то D BDE – прямоугольный. В D BDE $tg\angle BDC = \dfrac{BE}{BD}$, отсюда $BE = BD \cdot$ tgÐBDC,

$$BE \approx 6{,}28 \cdot tg86°03' \approx 6{,}28 \cdot 14{,}48 \approx 90{,}93 \text{ (см)}.$$

Ответ: $BE \approx 90{,}93$ см.