Дистанционный этап олимпиады “Физтех-2011”
9 класс. Решения задач

1. Находясь в гостях у Кролика, Винни-Пух за первый час съел 40% всего запаса меда Кролика, а Пятачок и Кролик вместе за это же время съели лишь 300 граммов меда. За следующий час Винни-Пух съел 80% от оставшегося меда, а Пятачок и Кролик съели 100 граммов меда на двоих. В итоге у Кролика осталось 800 грамм меда. Сколько килограммов меда было у Кролика до визита Винни-Пуха?

   Ответ. 8

   Решение. Пусть у Кролика было x килограммов меда. Тогда после первого часа осталось $0,6 \cdot 1000x - 300 = 600x - 300$ граммов меда. А после второго
$$0,2 \cdot (600x - 300) - 100 = 120x - 160.$$
   Поэтому $120x - 160 = 800$, то есть $x = \dfrac{960}{120} = 8$.

2. Стрелок сделал 30 выстрелов в мишень. За первое попадание ему начислили 13 баллов, а за каждое следующее попадание начисляли на 0,9 балла больше, чем за предыдущее. Сколько раз промахнулся стрелок, если он набрал 215,4 балла?

   Ответ. 18

   Решение. Составим таблицу:

Номер выстрела	Баллов за выстрел	Всего баллов
1	13	13
2	13,9	26,9
3	14,8	41,7
4	15,7	57,4
5	16,6	74
6	17,5	91,5
7	18,4	109,9
8	19,3	129,2
9	20,2	149,4
10	21,1	170,5
11	22	192,5
12	**22,9**	**215,4**
13	23,8	239,2
...	...	...

   Таким образом, стрелок попал 12 раз. Поэтому он промахнулся $30 - 12 = 18$ раз.

3. Найдите положительное число p, такое что прямая $y = 4x+p$ и координатные оси образуют треугольник, площадь которого равна 72.

   Ответ. 24

Решение. Прямая $y = 4x + p$ пересекает оси в точках $(0; p)$ и $\left(-\dfrac{p}{4}; 0\right)$. Получается прямоугольный треугольник с катетами p и $\dfrac{p}{4}$. Его площадь равна $\dfrac{1}{2} \cdot p \cdot \dfrac{p}{4} = \dfrac{p^2}{8}$. Значит, $p^2 = 72 \cdot 8 = 24^2$. Нас интересует лишь положительное p. Значит, $p = 24$.

4. Два велосипедиста выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. После их встречи первый прибывает в пункт B через 16 минут, а второй в пункт A через 25 минут. Сколько минут прошло от начала движения велосипедистов до их встречи?

   Ответ. 20

   Решение. Пусть искомое время равно t минут. Обозначим через C точку встречи велосипедистов.

   Первый проезжает отрезок AC за t минут, а второй – за 25 минут. А отрезок BC – первый проезжает за 16 минут, а второй – за t минут. Поэтому

$$\frac{t}{25} = \frac{16}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 400.$$

   Значит, $t = 20$.

5. Найдите последнюю цифру числа 2^{2129}.

   Ответ. 2

   Решение. Проследим за последней цифрой степеней двоек:

$$\begin{aligned}
2^1 &= \mathbf{2};\\
2^2 &= \mathbf{4};\\
2^3 &= \mathbf{8};\\
2^4 &= 1\mathbf{6};\\
2^5 &= 3\mathbf{2};\\
2^6 &= 6\mathbf{4};\\
2^7 &= 12\mathbf{8};\\
2^8 &= 25\mathbf{6};\\
&\ldots
\end{aligned}$$

   Так как последняя цифра произведения двух натуральных чисел зависит лишь от последней цифры каждого из сомножителей, то последние цифры степеней двоек будут повторяться с периодом 4. Заметим, что $2129 = 2128 + 1 = 532 \cdot 4 + 1$. Поэтому последняя цифра числа 2^{2129} совпадает с последней цифрой числа 2^1, то есть равна 2.

6. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 180, которые не делятся на 17.

   Ответ. 15355

Решение. Сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 180, равна $\frac{180 \cdot 181}{2} = 16290$. Наибольшее натуральное число, не превосходящее 180, которое делится на 17 – это $170 = 17 \cdot 10$. Поэтому сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 180, которые делятся на 17, равна $17 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 935$. Отсюда следует, что сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 180, которые не делятся на 17, равна $16290 - 935 = 15355$.

7. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{a^2 - ac - ab + bc} + \frac{2}{b^2 - ab - bc + ac} + \frac{1}{c^2 - ac - bc + ab}$$

при $a = 1,67$, $b = 1,71$ и $c = 0,46$.

Ответ. 20

Решение. Упростим исходное выражение:

$$\frac{1}{a^2 - ac - ab + bc} + \frac{2}{b^2 - ab - bc + ac} + \frac{1}{c^2 - ac - bc + ab} =$$

$$= \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{2}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} =$$

$$= \frac{(c-b) + 2(a-c) + (b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{a-c}{(a-b)(b-c)(c-a)} =$$

$$= -\frac{1}{(a-b)(b-c)} = -\frac{1}{(-0,04) \cdot 1,25} = 25 \cdot \frac{4}{5} = 20.$$

8. В колбе было 230 г 60%-го раствора кислоты. Лаборант отлил из колбы некоторое количество раствора и затем добавил в нее столько же воды, чтобы получить 48%-ый раствор кислоты. Сколько граммов воды добавил лаборант?

Ответ. 46

Решение. Пусть x – это искомая величина. После того как из колбы отлили x грамм раствора, в ней осталось $(230 - x) \cdot 0,6 = 138 - 0,6x$ грамм “чистой кислоты”. Значит, после доливания воды доля кислоты составляет $\frac{138 - 0,6x}{230}$. Осталось решить уравнение

$$\frac{138 - 0,6x}{230} = 0,48 \quad \Leftrightarrow \quad 138 - 0,6x = 110,4 \quad \Leftrightarrow \quad 0,6x = 27,6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 46.$$

9. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии в 3 раза меньше суммы последующих пяти ее членов. Найдите третий член этой прогрессии, если седьмой член равен 52.

Ответ. 20

Решение. Пусть первый член прогрессии равен a, а разность прогрессии равна d. Тогда $3(a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)) = (a+5d)+(a+6d)+(a+7d)+(a+8d)+(a+9d)$.

То есть

$$15a + 30d = 5a + 35d \quad \Leftrightarrow \quad 2a = d \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{d}{2}.$$

Седьмой член прогрессии равен $a + 6d = \dfrac{13}{2}d$. Значит, $d = \dfrac{52}{13/2} = 8$. Поэтому $a = 4$. Отсюда получаем, что третий член последовательности равен $a + 2d = 20$.

10. Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Известно, что $BC = 16$, $CA = 55$, $\angle AOB = 120^\circ$. Найдите сторону AB.

    Ответ. 49

    Решение. Так как вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и центральный угол AOB, то $\angle ACB = \dfrac{\angle AOB}{2} = 60^\circ$. Из теоремы косинусов имеем

$$AB^2 = 16^2 + 55^2 - 2 \cdot 16 \cdot 55 \cdot \frac{1}{2} = 256 + 3025 - 880 = 2401 = 49^2.$$

11. Найдите x и y, такие что выполняется равенство

$$x^2 + 12xy + 52y^2 - 8y + 1 = 0.$$

    Ответ. $(-1,5; 0,25)$

    Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$x^2 + 12xy + 52y^2 - 8y + 1 = x^2 + 12xy + 36y^2 + 16y^2 - 8y + 1 = (x + 6y)^2 + (4y - 1)^2.$$

    Сумма квадратов двух чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно нулю. Поэтому $y = \dfrac{1}{4}$, а $x = -6y = -\dfrac{3}{2}$.

12. Два велосипедиста выезжают навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 240 километров. Если первый выедет на 4,5 часа раньше второго, то он встретит второго велосипедиста через 7,5 часа после своего выезда. Если второй выедет на 1 час раньше первого, то он встретит первого велосипедиста через 6 часов после своего выезда. С какой скоростью (в км/ч) едет каждый велосипедист?

    Ответ. 24; 20

    Решение. Пусть v_1 и v_2 – искомые скорости. Тогда

$$\begin{cases} 7,5v_1 + (7,5 - 4,5)v_2 = 240; \\ (6-1)v_1 + 6v_2 = 240; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7,5v_1 + 3v_2 = 240; \\ 5v_1 + 6v_2 = 240; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 10v_1 = 240; \\ 4v_2 = 80. \end{cases}$$

    Отсюда $v_1 = 24$, а $v_2 = 20$.

13. При каком натуральном значении n числа n, $n+15$, $46n-30$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

Ответ. 3

Решение. Из характеристического свойства геометрической прогрессии следует, что

$$(n+15)^2 = n(46n-30) \quad \Leftrightarrow \quad n^2+30n+225 = 46n^2-30n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 45n^2-60n-225=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3n^2-4n-15=0.$$

Поэтому $n=3$ или $n=-\frac{5}{3}$. Но нас интересуют лишь натуральные n.

14. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырехугольников с вершинами в этих точках?

Ответ. 1200; 2970

Решение. Треугольники бывают двух типов: с двумя вершинами на первой прямой и с одной на второй, и наоборот. Из 10 точек выбрать две можно $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ способами. Поэтому треугольников первого типа $45\cdot 12 = 540$ штук. Аналогично, треугольников второго типа $\frac{12\cdot 11}{2}\cdot 10 = 660$ штук. Итого, 1200 треугольников.

Четырехугольники же однозначно задаются четырьмя вершинами, две из которых на одной прямой, и еще две – на другой. Значит, всего различных четырехугольников

$$\frac{10\cdot 9}{2}\cdot\frac{12\cdot 11}{2} = 45\cdot 66 = 2970.$$

15. Хорды AB и CD пересекаются в точке X. M – точка пересечения биссектрисы угла BXD с хордой BD. Найдите отрезок BM, если $BD=27$, а площади треугольников CXB и AXD относятся как $25:16$.

Ответ. 15

Решение. Треугольники CXB и AXD подобны (по трем углам), с коэффициентом подобия $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$. Поэтому $\frac{BX}{XD} = \frac{5}{4}$. По теореме о биссектрисе угла $\frac{BM}{MD} = \frac{BX}{XD} = \frac{5}{4}$. Значит, $\frac{BM}{BD} = \frac{5}{9}$. Следовательно, $BM = 27\cdot\frac{5}{9} = 15$.

16. Целые числа m и n таковы, что $4m+5n = mn-9$. Найдите, какое наибольшее значение может принимать m.

Ответ. 34

Решение. Перенесем все в одну сторону:

$$mn-4m-5n-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad m(n-4)-5(n-4)-20-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-5)(n-4)=29.$$

Так как 29 простое число, то его можно представить в виде произведения двух целых чисел лишь четырьмя способами:

$$29 = 1 \cdot 29 = 29 \cdot 1 = (-1) \cdot (-29) = (-29) \cdot (-1).$$

Осталось лишь решить четыре линейные системы:

$$\begin{cases} m-5=1; \\ n-4=29; \end{cases} \quad \begin{cases} m-5=29; \\ n-4=1; \end{cases} \quad \begin{cases} m-5=-1; \\ n-4=-29; \end{cases} \quad \begin{cases} m-5=-29; \\ n-4=-1. \end{cases}$$

Получаем четыре решения $(6;33)$, $(34;5)$, $(4;-25)$, $(-24;3)$.

17. Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких что точка $(14;22)$ содержится внутри (но не на границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты – натуральны и меньше, чем 31.

Ответ. 30576

Решение. Очевидно, что прямоугольник однозначно задают координаты его левого нижнего и правого верхнего углов. Пусть их координаты $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$. При этом x_1 – любое натуральное число от 1 до 13 (13 вариантов); y_1 – любое натуральное число от 1 до 21 (21 вариант); x_2 – любое натуральное число от 15 до 28 (14 вариантов); y_2 – любое натуральное число от 23 до 30 (8 вариантов). Итого, $13 \cdot 21 \cdot 14 \cdot 8 = 30576$.

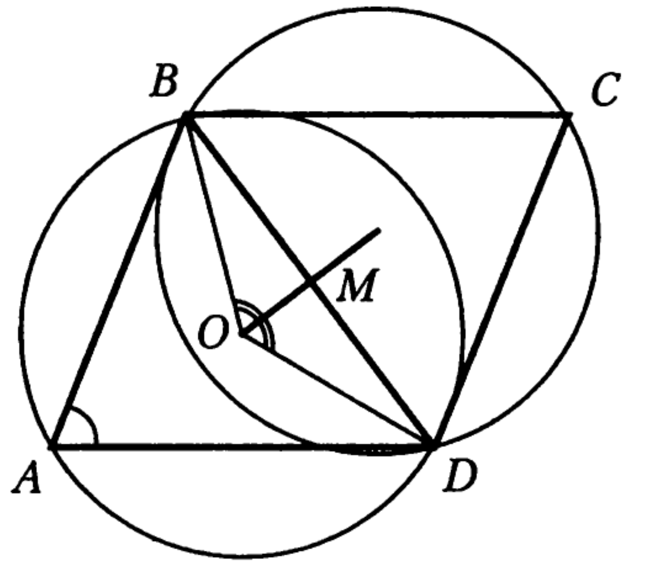
18. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = 50$, $BC = 21$ и $\cos\angle BAD = \dfrac{3}{5}$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и BCD.

Ответ. 30,75

Решение. Так как треугольники BAD и BCD равны, а центры обеих окружностей лежат на серединном перпендикуляре к BD, то расстояние между центами равно удвоенному расстоянию от центра одной из них до отрезка BD.

Рассмотрим треугольник BAD. В нем $AB = 50$, $AD = 21$ и $\cos\angle BAD = \dfrac{3}{5}$, поэтому по теореме косинусов получаем

$$BD^2 = 50^2 + 21^2 - 2 \cdot 50 \cdot 21 \cdot \frac{3}{5} = 2500 + 441 - 1260 = 1681 = 41^2.$$



Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника BAD. Тогда центральный угол BOD в два раза больше вписанного угла BAD. Поэтому OM – расстояние от точки O до отрезка BD равно

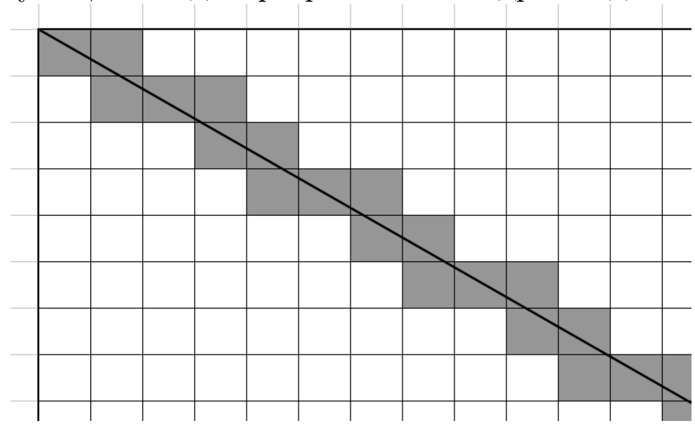
$$\frac{BD}{2} \cdot \operatorname{ctg} \angle BAD = \frac{41}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{123}{8}.$$

Следовательно искомое расстояние равно $\dfrac{123}{4}$.

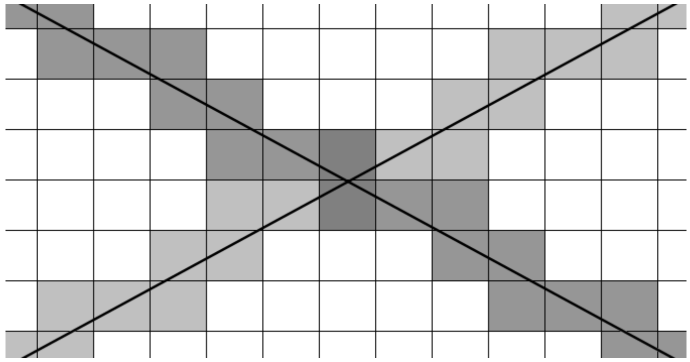
19. Прямоугольник 57×34 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на единичные квадратики. На сколько частей в итоге разобьется прямоугольник, если в нем провести еще и две диагонали?

Ответ. 2118

Решение. Вертикальные и горизонтальные прямые разобьют прямоугольник на $57 \cdot 34 = 1938$ единичных квадратиков. Так как 57 и 34 взаимно простые числа, то диагонали не проходят ни через одну из вершин квадратиков, кроме вершин исходного прямоугольника. Поэтому диагональ разрезает $57 + 34 - 1 = 90$ квадратиков, "змейкой" соединяющие противоположные углы, а каждый разрезанный квадратик добавляет одну часть.



При этом, в силу того что 57 нечетное, а 34 – четное число, диагонали пересекаются на стороне квадратика.



Поэтому их пересечение не добавляет частей. В итоге получаем, что прямоугольник разрезан на $1938 + 2 \cdot 90 = 2118$.

20. 19 депутатов Городского Собрания выбирают Председателя из 5 кандидатов. Каждый голосует ровно за одного из них. После голосования составляется протокол заседания, в котором указывается лишь количество голосов за каждого кандидата (без указания кто за кого проголосовал). Сколько различных протоколов может получиться?

    Ответ. 8855

    Решение. Пусть каждый депутат бросает в урну для голосования белый листок с номером кандидата, за которого он проголосовал. Достанем все листки и упорядочим по номеру кандидата. Получится несколько (возможно, ни одного) листков за первого, несколько за второго и т.д. Чтобы отделить листки каждого из кандидатов от следующего и предыдущего, вложим между ними черный листок (если за кого-то никто не проголосовал, положим листок все равно). Получится четыре черных разделительных листка.

    Заметим теперь, что положение этих черных листков среди всех $19 + 4 = 23$ листков однозначно определяет соответствующий протокол. Значит, всего протоколов будет $C_{23}^4 = \dfrac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8855$.