

Дистанционный этап олимпиады “Физтех-2011”  
9 класс. Решения задач

1. Во время загородной поездки автомобиль на каждые сто километров пути расходует на пять литров бензина меньше, чем в городе. Водитель выехал с заправки с полным баком, проехал 180 км по городу и 130 км по загородному шоссе до заправки. Заправив автомобиль, он обнаружил, что в бак вошло 43,1 литра бензина. Найдите расход бензина (в литрах) на сто километров пути при поездке по городу.

Ответ. 16

Решение. Пусть при поездке по городу автомобиль расходует  $x$  литров бензина на сто километров пути. Тогда за городом он будет расходовать  $x - 5$  литров бензина на сто километров пути. Тогда за всю поездку автомобиль израсходует  $x \cdot 1,8 + (x - 5) \cdot 1,3 = 43,1$  литра. Откуда  $x = 16$ .

2. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 540.

Ответ. 2569

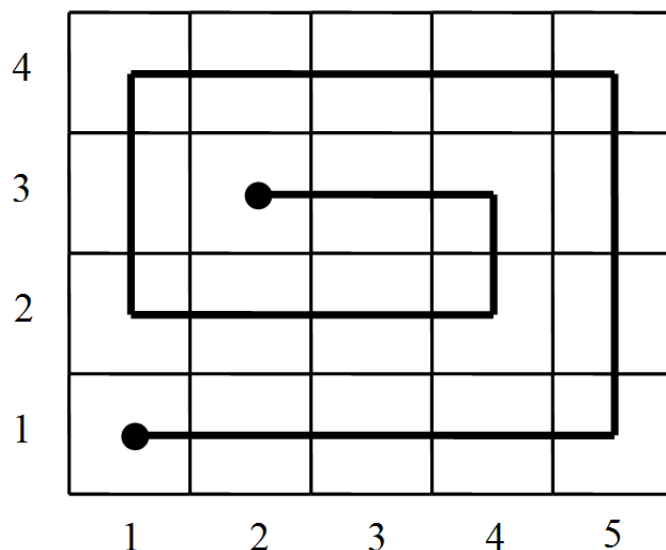
Решение. Заметим, что  $540 = 5 \cdot 3^3 \cdot 2^2$ . Цифра 5 обязана быть цифрой искомого числа. Произведение оставшихся цифр равно 108. То есть их не менее трех, и искомое число имеет не менее четырех цифр. Очевидно, что в наименьшем числе нет цифры 1, и все цифры идут в порядке возрастания. Попытаемся найти наименьшее четырехзначное число с произведением цифр 540. Пусть его первая цифра 2. В нем есть цифра 5, а произведение оставшихся равно  $54 = 3^3 \cdot 2$ . То есть две другие цифры — 9 и 6. Наименьшее число с такими цифрами — 2569. Если же первая цифра больше 2, то число будет больше, чем 2569.

3. Вписанная в прямоугольный треугольник окружность делит точкой касания один из катетов на отрезки длины 6 и 7. Найдите длину гипотенузы.

Ответ. 85

Решение. Обозначим вершины треугольника  $A, B, C$  ( $\angle C = 90^\circ$ ), а точки касания со сторонами  $BC, AC, AB$  как  $L, M, N$  соответственно. Тогда  $CM = 6, AM = 7$ . По свойству касательной  $CL = 6, AN = 7, BL = BN$ . Пусть  $BN = x$ , тогда  $AC = 13, BC = 6 + x, AB = 7 + x$ , и по теореме Пифагора получим:  $13^2 + (6 + x)^2 = (7 + x)^2$ , откуда  $x = 78$  и  $AB = 85$ .

4. Строки доски  $1001 \times 2012$  пронумерованы от 1 до 1001 снизу вверх, а столбцы пронумерованы от 1 до 2012 слева направо. Змейка начинает ползти из левой нижней клетки доски направо. Змейка не может выходить за пределы доски, и посещать одну клетку более одного раза. Если змейка не может продолжить движение, она поворачивает налево и далее следует по прямой. Таким образом, змейка пройдет доску по спирали, побывав в каждой клетке ровно по разу. Найдите сумму номеров строки и столбца клетки, в которой змейка закончит движение. На рисунке проиллюстрировано, что для доски  $4 \times 5$  ответ  $3 + 2 = 5$ .



Ответ. 2013

Решение. Высота доски – нечетное число, и высота меньше ширины. Поэтому движение окончится в средней (501-й) горизонтали. Всего будет 1001 горизонтальный ход и 1000 вертикальных. Горизонтальные ходы с нечетными номерами будут вправо. Поэтому 1001 ход змейки вправо будет таким, что справа останется ровно  $\frac{1000}{2} = 500$  запрещенных клеток. То есть змейка остановится в вертикали с номером  $2012 - 500 = 1512$ . Тогда искомая сумма номеров есть  $1512 + 501 = 2013$ .

5. Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором уравнения  $5x^2 - 11x + 2 = 0$  и  $2x^2 - (a + 2)x + a = 0$  имеют общий корень.

Ответ. 0,4

Решение. Заметим, что корнями уравнения  $5x^2 - 11x + 2 = 0$  будут числа  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 0,2$ . Найдем  $a$ , при котором число  $x_1$  будет корнем второго уравнения. Подставим  $x_1 = 2$ . Получим

$$8 - (a + 2) \cdot 2 + a = 0,$$

откуда  $a = 4$ . Аналогично, подставив  $x_2 = 0,2$ , получим  $a = 0,4$ . Значит, наименьшее  $a = 0,4$ .

6. В некотором классе каждый ученик либо всегда говорит ложь, либо всегда говорит правду. При этом каждый из них знает про остальных, кто лжец, а кто нет. На сегодняшнем собрании присутствовали все ученики класса, и каждый сообщил, кем является каждый из остальных. Ответ “лжец” при этом прозвучал 272 раз. Вчера проводилось такое же собрание, но один из учеников отсутствовал. Тогда ответ “лжец” прозвучал 256 раз. Сколько учеников в таком классе?

Ответ. 25

Решение. Пусть в классе  $x$  человек говорят правду, а  $y$  человек лгут. Тогда каждый, кто говорит правду, на сегодняшнем собрании сказал “лжец”  $y$  раз. А каждый, кто говорит ложь, на сегодняшнем собрании сказал “лжец”  $x$  раз. Тогда получим уравнение  $xy + yx =$

$2xy = 272$ . Пусть вчера отсутствовал лжец. Тогда аналогично можно получить уравнение  $2x(y - 1) = 256$ . Вычитая, получим  $2x = 16$ . Откуда  $x = 8$ ,  $y = 17$ , и общее количество учеников равно 25. Если же вчера отсутствовал говорящий правду, аналогично получаем, что  $x = 17$ ,  $y = 8$ , и общее количество учеников также равно 25.

7.  $ABCD$  – параллелограмм,  $\angle BAD = 60^\circ$ , биссектрисы углов  $A$  и  $D$  пересекаются на стороне  $BC$ . Найдите  $AB$ , если  $AD = 10$ .

Ответ. 5

Решение. Заметим, что  $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$ ,  $\angle ABC = \angle CDA = 120^\circ$ . Пусть биссектрисы углов  $A$  и  $D$  пересекаются в точке  $M$ . Тогда  $\angle MDC = \angle MDA = 60^\circ$ ,  $\angle MAD = \angle MAB = 30^\circ$ . Отсюда получаем, что треугольник  $AMD$  прямоугольный ( $\angle MDA = 60^\circ$ ,  $\angle MAD = 30^\circ$ ), поэтому катет  $MD$  равен половине гипотенузы, то есть  $MD = 5$ . В треугольнике  $MCD$  два угла равны  $60^\circ$ . Значит, он равносторонний, и  $MC = CD = MD = 5$ . Но  $AB = CD$ . То есть  $AB = 5$ .

8. Маша и Саша делят между собой ягоды, собранные ими в лесу. Вначале, Маша берет 15 ягод, далее дети берут ягоды по очереди, причем каждый берет ровно на одну ягоду больше, чем предыдущий. Если количество ягод, которое ребенок должен взять, превышает количество ягод в куче, он берет все оставшиеся ягоды. В конце дележа у Маши оказалось 1012 ягод. Сколько ягод было в куче?

Ответ. 2012

Решение. Каждый следующий ход Маша берет на две ягоды больше, чем в предыдущий. То есть на  $k$ -ом ходе она берет  $a_k = 15 + (k - 1) \cdot 2$  ягоды. А всего за  $n$  таких ходов Маша берет

$$S_n = 15n + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + 14n$$

ягод. Заметим, что  $S_{25} = 975 < 1012$ ,  $S_{26} = 1040 > 1012$ . Это означает, что Маша сделала 15 ходов, и Саша сделал 25 ходов, после чего Маша забрала оставшиеся ягоды. За 25 ходов Саша заберет на 25 ягод больше, чем Маша за 25 ходов, то есть 1000. Значит всего ягод было  $1000 + 1012 = 2012$ .

9. “Жигули” и “Москвич” одновременно выехали из поселка А в город Б и через 15 минут “Жигулям” оставалось доехать до города Б 40 км, а “Москвичу” 50 км. Через сколько минут после “Жигулей” приехал в город Б “Москвич”, если скорость “Москвича” составляет 60 % от скорости “Жигулей”?

Ответ. 26

Решение. Через 15 минут расстояние между “Жигулями” и “Москвичом” составило 10 км. Значит, разность их скоростей – 40 км/час. Но эта разность – 40 % от скорости “Жигулей”. Получаем, что скорость “Жигулей” – 100 км/час, а “Москвича” – 60 км/час. То есть “Жигулям” осталось ехать  $\frac{40}{100} = 0,4$  часа = 24 минуты, а “Москвичу” –  $\frac{50}{60}$  часа = 50 минут. То есть в город Б “Москвич” приедет через  $50 - 24 = 26$  минут после “Жигулей”.

10. Какое количество натуральных чисел  $a$  обладает следующим свойством: “Наименьшее общее кратное чисел 16, 50 и  $a$  равняется 1200”?

Ответ. 15

Решение. Заметим, что  $16 = 2^4$ ,  $50 = 5^2 \cdot 2$ ,  $1200 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^4$ . Это означает, что в числе  $a$  множитель 3 будет ровно в первой степени, а степени чисел 5 и 2 могут быть любыми, не превосходящими 2 и 4 соответственно. То есть для множителя 5 есть три возможности, а для 2 – пять. Итого получается  $3 \cdot 5 = 15$  вариантов.

11. Пропускная способность большой трубы на  $9 \text{ м}^3/\text{ч}$  больше, чем маленькой трубы. Известно, что 16 маленьких труб могут наполнить бассейн на пять часов быстрее, чем одна большая труба. Найдите, какой наименьший объем (в кубических метрах) может быть у бассейна.

Ответ. 80

Решение. Пусть объем бассейна  $V \text{ м}^3$ , скорость наполнения маленькой –  $x \text{ м}^3/\text{ч}$ , а большой –  $x + 9 \text{ м}^3/\text{ч}$ . Тогда

$$\frac{V}{16x} + 5 = \frac{V}{x + 9}.$$

Откуда  $V(x) = \frac{5}{\frac{1}{x+9} - \frac{1}{16x}} = \frac{80(x^2 + 9x)}{3(5x - 3)}$ . Найдем производную:

$$V'(x) = \frac{80}{3} \cdot \frac{(2x + 9)(5x - 3) - 5(x^2 + 9x)}{(5x - 3)^2} = \frac{80}{3} \cdot \frac{5x^2 - 6x - 27}{(5x - 3)^2}.$$

Производная равна нулю при  $5x^2 - 6x - 27 = 0$ . Положительный корень производной, при котором достигается минимум

$$x = \frac{3 + \sqrt{9 + 135}}{5} = \frac{3 + 12}{5} = 3.$$

При этом  $V = \frac{80 \cdot (9 + 27)}{3 \cdot (15 - 3)} = 80$ .

12. Найдите число  $\overline{ab}$ , если известно, что число

$$\underbrace{2011 \dots 2011}_{101 \text{ раз}} a 2011 b \underbrace{2011 \dots 2011}_{101 \text{ раз}}$$

делится на 99.

Ответ. 61

Решение. По признакам делимости на 9 и 11 имеем:  $a + b$  дает остаток 7 при делении на 9, а  $b - a$  дает остаток 6 при делении на 11. Так как  $a$  и  $b$  – цифры, имеем:  $a + b = 7$  или  $a + b = 16$ , и  $b - a = 6$  или  $b - a = -5$ . Так как сумма и разность чисел имеют одинаковую четность, возможны два варианта:  $a + b = 7$ ,  $b - a = -5$ , откуда  $b = 1$ ,  $a = 6$ ;  $a + b = 16$ ,  $b - a = 6$ , откуда  $b = 11$ ,  $a = 5$  – что невозможно.

13. В выходные дни в метро пассажиропоток уменьшается на 70%, а интервал между поездами увеличивается на 60%. На сколько процентов среднее количество человек в вагоне метро в выходные дни меньше, чем в рабочие дни?

Ответ. 52

Решение. Пусть в рабочие дни в вагоне метро в среднем ездит  $x$  человек, тогда в выходные ездит  $x \cdot (1 - 0,7) \cdot (1 + 0,6) = 0,48x$ . То есть среднее количество человек в вагоне метро в выходные дни на  $100 - 48 = 52\%$  меньше, чем в рабочие дни.

14. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с третьего, равняется сумме двух предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равняется 2012?

Ответ. 396

Решение. Пусть первое число равно  $x$ , а второе  $y$ . Тогда третье равно  $x + y$ , четвертое –  $x + 2y$ , пятое –  $2x + 3y$ , шестое –  $3x + 5y$ , седьмое –  $5x + 8y$ . Итак,  $5x + 8y = 2012$ . Если  $x$  максимально, то  $y$  – минимально. То есть нам нужно найти такое наименьшее  $y$ , чтобы число  $2012 - 8y$  делилось на 5 (так как  $x$  натуральное). Числа  $y = 1, 2, 3$  не подходят. А при  $y = 4$  получаем ответ:  $x = 396$ .

15. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 5000?

Ответ. 32

Решение. Рассмотрим две возможности.

1) Одно из чисел равно 5000. Тогда другое число может быть любым делителем числа 5000. Поскольку  $5000 = 2^3 \cdot 5^4$ , оно имеет  $(3 + 1) \cdot (4 + 1) = 20$  делителей.

2) Ни одно из двух чисел  $a, b$  не равно 5000. Тогда в разложении одного из этих чисел (для определенности, числа  $a$ ) на простые сомножители должен присутствовать множитель  $2^3$ , а в разложении другого – множитель  $5^4$ . Таким образом,  $a = 2^3 \cdot 5^m$ ,  $b = 2^n \cdot 5^4$ , где  $m$  может принимать четыре значения (0, 1, 2, 3), и независимо от этого  $n$  может принимать три значения (0, 1, 2). Таким образом, в этом случае имеется  $4 \cdot 3 = 12$  возможностей. Итак, имеется  $20 + 12 = 32$  пары натуральных чисел, удовлетворяющих условию.

16. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, две медианы которого равны 3 и 7?

Ответ. 14

Решение. Пусть в треугольнике  $ABC$  медианы  $AM = 7$ ,  $BN = 3$ ,  $L$  – точка пересечения медиан. Заметим, что три медианы разбивают треугольник на шесть треугольничков равной площади. Поэтому  $S_{ABC} = 6S_{BLM}$ , но

$$S_{BLM} = \frac{1}{2} \cdot BL \cdot LM \cdot \sin BLM.$$

Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины, то  $BL = \frac{2}{3} \cdot BN = 2$ ,  $LM = \frac{1}{3} \cdot AM = \frac{7}{3}$ . Тогда

$$S_{ABC} = 6S_{BLM} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{7}{3} \cdot \sin BLM = 14 \cdot \sin BLM.$$

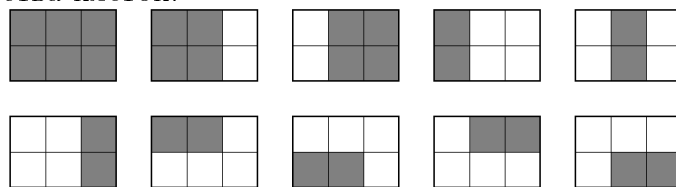
Площадь максимальна, когда  $\sin BLM = 1$ , то есть медианы перпендикулярны. Несложно показать, что такой треугольник существует. Значит, максимальная возможная площадь равна 14.

17. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на 21 равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбит на 441 треугольничков. Назовем цепочкой последовательность треугольничков, в которой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное количество треугольничков в такой цепочке?

Ответ. 421

Решение. Рассмотрим раскраску треугольничков в два цвета (черный и белый) такую, что соседние по стороне треугольнички окрашены в разные цвета, и угловые треугольнички покрашены в черный цвет. Заметим, что всего получится  $1 + 2 + \dots + 21 = 231$  черных треугольничков и 210 белых. Заметим, что в рассматриваемых цепочках цвета треугольничков чередуются. В таких цепочках количество черных и белых треугольничков различается не больше чем на единицу. Поэтому всего в цепочке не более 210 белых и 211 черных треугольничков. Пример такой цепочки с 421 треугольничком, проходящей через все белые треугольнички, нарисовать несложно.

18. В клетчатом прямоугольнике  $2 \times 3$  можно выделить десять прямоугольников, состоящих из четного количества клеток.



А какое количество прямоугольников, содержащих четное число клеток, можно выделить в клетчатом прямоугольнике  $4 \times 9$ ?

Ответ. 300

Решение. Пронумеруем горизонтальные и вертикальные линии сетки так, как показано на рисунке.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										

Будем каждый прямоугольник обозначать двумя парами чисел – номерами горизонтальных и вертикальных линий сетки, ограничивающих его. Например, указанный на рисунке прямоугольник будет  $(2 - 4; 3 - 7)$ .

Количество способов выбрать пару горизонтальных линий  $C_5^2 = 10$ . При этом пар горизонтальных линий, задающих вертикальные стороны нечетной длины будет  $3 \cdot 2 = 6$ , так как одна из линий должна быть нечетной (три варианта), а вторая – четной (два варианта). Значит, пар горизонтальных линий, задающих вертикальные стороны четной длины будет  $10 - 6 = 4$ .

Количество способов выбрать пару вертикальных линий  $C_{10}^2 = 45$ . При этом пар вертикальных линий, задающих горизонтальные стороны нечетной длины будет  $5 \cdot 5 = 25$ . Значит, пар вертикальных линий, задающих горизонтальные стороны четной длины будет  $45 - 25 = 20$ .

Прямоугольник будет содержать четное число клеток в одном из трех случаев:

- 1) Обе стороны четны:  $4 \cdot 20 = 80$  прямоугольника.
- 2) Вертикальная сторона четная, а горизонтальная – нечетная:  $4 \cdot 25 = 100$  прямоугольника.
- 3) Вертикальная сторона нечетная, а горизонтальная – четная:  $6 \cdot 20 = 120$  прямоугольника.

Итого,скомое количество прямоугольников  $80 + 100 + 120 = 300$ .

19. Натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что

$$\begin{cases} ab + bc + ca + 1,5 \cdot (a + b + c) = 7039, \\ 2abc - a - b - c = 2008. \end{cases}$$

Найдите наименьшее значение  $a + b + c$ .

Ответ. 2012

Решение. Умножим первое уравнение на 2 и прибавим ко второму. Получим

$$2(ab + bc + ca + abc + a + b + c) = 16086,$$

то есть

$$ab + bc + ca + abc + a + b + c = 8043.$$

Добавим слева и справа единицу. Разложив левую часть на множители, получим

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8044 = 2 \cdot 2 \cdot 2011$$

(2011 – простое число). А так как  $a$ ,  $b$  и  $c$  натуральные, то единственное решение – это тройка чисел 1, 1 и 2010 (с точностью до перестановки). Легко проверить, что указанные числа удовлетворяют каждому из уравнений системы. Искомая сумма равна 2012.

20. Сколькими способами можно выложить в ряд три красных, четыре синих и пять зеленых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

Ответ. 7056

Решение. Сначала разложим красные и зеленые шары. Для этого надо выбрать три места из восьми для красных шаров. Между ними (а также слева и справа) остается девять мест, куда нужно разместить синие шары. Из этих мест надо выбрать четыре. Итого получается

$$C_8^3 \cdot C_9^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 56 \cdot 126 = 7056.$$