РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ш (ВЫЕЗД, ФИЗТЕХ-2010)

1. Решите неравенство

$$\log_{(x+2)}\left(\sqrt{x+3}+1\right) \leq 1.$$

Ответ: $(-2,-1)\cup[1,+\infty)$.

Решение: ОДЗ $x\in(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$. Если $x\in(-2,-1)$, то $x+2<1$, а $\sqrt{x+3}+1>1$. Следовательно, получаем $\log_{(x+2)}\left(\sqrt{x+3}+1\right)<0<1$, и поэтому $x\in(-2,-1)$ — решения. Если же $x>-1$, то $x+2>1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+3}\leq x+1$, которое имеет решение $x\in[1,+\infty)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2} &= 1, \\ \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2} &= y^2-2x^2+2x+3. \end{cases}$$

Ответ: $(3;4)$, $(3;-4)$, $\left(-1;2\sqrt[4]{6}\right)$, $\left(-1;-2\sqrt[4]{6}\right)$.

Решение: Перемножив уравнения системы, получим $y^2-x^2=y^2-2x^2+2x+3$, т. е. $x^2-2x-3=0$, откуда $x=3$ или $x=-1$.

При $x=3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-y^2}=3$, откуда $y=\pm4$. Подставляя $x=3$ и $y=\pm4$ во второе уравнение системы, получаем $4+3=7=16-18+6+3$ — тождество. Таким образом, обе пары $(3;-4)$ и $(3;4)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $x=-1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-y^2}=2\sqrt{6}-1$, откуда $y^2=4\sqrt{6}$ и $y=\pm2\sqrt[4]{6}$. Подставляя $x=-1$ и $y=\pm2\sqrt[4]{6}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6}+\sqrt{25-4\sqrt{6}}=4\sqrt{6}-4+3$, т. е. $\sqrt{25-4\sqrt{6}}= 2\sqrt{6}-1$, что равносильно $25-4\sqrt{6}=24-4\sqrt{6}+1$ — тождество. Таким образом, обе пары $\left(-1;2\sqrt[4]{6}\right)$ и $\left(-1;-2\sqrt[4]{6}\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. Решите уравнение

$$\sin 3x+3|\sin x|=\cos 4x-\cos 2x.$$

Ответ: $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решение: Рассмотрим случай $t=\sin x\geq 0$. Исходное уравнение примет вид $\sin 3x+3\sin x=-2\sin 3x\sin x$. Так как $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$, то получаем

$(3t-4t^3)(1+2t)+3t=0$. Отсюда находим

$$t(4t^3+2t^2-3t-3)=t(t-1)(4t^2+6t+3)=0.$$

Уравнение $4t^2+6t+3=0$ не имеет корней. Следовательно, либо $t=\sin x=0$ и $x=\pi n$, либо $t=\sin x=1$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t=\sin x<0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2(4t^2+2t-3)=0$. Уравнение $4t^2+2t-3=0$ имеет корни $t_1=\frac{-1-\sqrt{13}}{4}<-1$ и $t_2=\frac{-1+\sqrt{13}}{4}>0$, т. е. в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, высота SO равна 2. Точка K лежит на высоте SO, причём $KS:KO=1:3$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки D до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SD.

Ответ: площадь $=\frac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние $=\frac{3}{\sqrt{5}}$, угол $=\arcsin\frac{4}{5}$.

Решение: Имеем $AO=1$, $AS=\sqrt{5}$. Пусть $2\alpha=\angle ASC$, $2\beta=\angle ASD$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 2\beta=\frac{3}{5}$, $\cos 2\beta=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}2\beta=\frac{3}{4}$.

Пусть плоскость Π пересекается с прямыми AS, CS и DS в точках M, N и P соответственно. В плоскости ASC из прямоугольного $\triangle KSM$ имеем $SM= =SK\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного $\triangle NMS$ имеем $SN=\frac{SM}{\cos 2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $MN=SN\sin 2\alpha=\frac{4}{3\sqrt{5}}$.

В плоскости ASD из прямоугольного $\triangle PMS$ имеем $MP=SM\operatorname{tg}2\beta=\frac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP=\frac{SM}{\cos 2\beta}=\frac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярно плоскости Π, то углом между прямой SD и плоскостью Π является $\angle SPM=\frac{\pi}{2}-2\beta=\arcsin\frac{4}{5}$. Так как $DP= =SD-SP=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки D до плоскости Π равно $DP\sin\angle SPM=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости CDS из $\triangle PNS$ по теореме косинусов находим $PN^2=\frac{5}{16}+ +\frac{5}{9}-\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{29}{9\cdot 16}$. Рассмотрим $\triangle MPN$. Пусть $\angle PMN=\varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\frac{29}{9\cdot 16}=\frac{9}{16\cdot 5}+\frac{16}{9\cdot 5}-\frac{2}{5}\cos\varphi$, откуда $\frac{145}{9\cdot 16}=\frac{9\cdot 9+16\cdot 16}{9\cdot 16}-2\cos\varphi$, и $\cos\varphi=\frac{81+256-145}{18\cdot 16}=\frac{192}{18\cdot 16}=\frac{2}{3}$. Следовательно, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь сечения равна $MP\cdot MN\cdot\sin\varphi=\frac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sqrt{2}\cos y &= \frac{3}{2}, \\ \\ \sqrt{2}\sin y + \sqrt{3}\cos x &= \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$.

Решение: Сложив уравнения системы, получим

$$2\sin\left(x + \tfrac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(y + \tfrac{\pi}{4}\right) = 4.$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ и $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ и $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$, т. е. это решения.

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AB и CD равны соответственно 3 и 5, а длина основания AD больше длины BC. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

Ответ: $R = \frac{\sqrt{14}}{3}$, $AC = 2\sqrt{\frac{10}{3}}$, $BD = 2\sqrt{\frac{26}{3}}$.

Решение: Пусть M, K, N, E — точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами AB, BC, CD и AD соответственно. Пусть P — середина AB, Q — середина CD, так что PQ — средняя линия трапеции. Пусть F и T — проекции точек B и C на AD. Пусть R — радиус вписанной в трапецию окружности, h — высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $BM = BK = x$, $CN = CK = y$. Тогда $AM = AE = 3 - x$, $DN = DE = 5 - y$, $BC = x + y$, $AD = AE + DE = 8 - (x + y)$, $PQ = \frac{BC+AD}{2} = 4$, $AF = AE - FE = 3 - 2x$, $DT = DE - TE = 5 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 — площади трапеций $PBCQ$ и $APQD$. Тогда $S_1 = \frac{R}{2}(BC + PQ) = \frac{R}{2}(4 + x + y)$, $S_2 = \frac{R}{2}(PQ + AD) = \frac{R}{2}(12 - x - y)$. По условию, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{11} = \frac{4+x+y}{12-(x+y)}$, откуда $x + y = 1$. Так как $BF^2 = h^2 = AB^2 - AF^2 = 9 - (3 - 2x)^2 = 4(3x - x^2)$ и $CT^2 = h^2 = CD^2 - DT^2 = 25 - (5 - 2y)^2 = 4(5y - y^2)$, то $3x - x^2 = 5y - y^2$. Поскольку $x = 1 - y$, то $3(1 - y) - (1 - y)^2 = 5y - y^2$, откуда $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $R = \sqrt{5y - y^2} = \frac{\sqrt{14}}{3}$, $AT = 3 - x + y = \frac{8}{3}$, $DF = 5 - y + x = \frac{16}{3}$, $AC = \sqrt{CT^2 + AT^2} = \sqrt{\frac{56}{9} + \frac{64}{9}} = 2\sqrt{\frac{10}{3}}$, $BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{\frac{56}{9} + \frac{256}{9}} = 2\sqrt{\frac{26}{3}}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА И (ВЫЕЗД, ФИЗТЕХ-2010)

1. Решите неравенство

$$\log_{(x+5)}\left(\sqrt{x+8}+3\right) \leq 1.$$

Ответ: $(-5, -4) \cup [1, +\infty)$.

Решение: ОДЗ $x \in (-5, -4) \cup (-4, +\infty)$. Если $x \in (-5, -4)$, то $x + 5 < 1$, а $\sqrt{x+8} + 3 > 1$. Следовательно, получаем $\log_{(x+5)}\left(\sqrt{x+8}+3\right) < 0 < 1$, и поэтому $x \in (-5, -4)$ — решения. Если же $x > -4$, то $x + 5 > 1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+8} \leq x + 2$, которое имеет решение $x \in [1, +\infty)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2} &= 7, \\ \\ \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2} &= \frac{1}{7}(y^2-2x^2+2x+3). \end{cases}$$

Ответ: $(3; 4)$, $(3; -4)$, $\left(-1; 2\sqrt{7\sqrt{6}-12}\right)$, $\left(-1; -2\sqrt{7\sqrt{6}-12}\right)$.

Решение: Перемножив уравнения системы, получим $y^2-x^2 = y^2-2x^2+2x+3$, т. е. $x^2 - 2x - 3 = 0$, откуда $x = 3$ или $x = -1$.

При $x = 3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-y^2} = 3$, откуда $y = \pm 4$. Подставляя $x = 3$ и $y = \pm 4$ во второе уравнение системы, получаем $4 - 3 = 1 = \frac{1}{7}(16 - 18 + 6 + 3)$ — тождество. Таким образом, обе пары $(3; -4)$ и $(3; 4)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $x = -1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-y^2} = 7 - 2\sqrt{6}$, откуда $y^2 = 28\sqrt{6} - 48$ и $y = \pm 2\sqrt{7\sqrt{6}-12}$. Подставляя найденные значения $x = -1$ и $y = \pm 2\sqrt{7\sqrt{6}-12}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6} - \sqrt{25+48-28\sqrt{6}} = \frac{1}{7}\left(28\sqrt{6}-49\right) = 4\sqrt{6}-7$, т. е. $\sqrt{25+48-28\sqrt{6}} = 7-2\sqrt{6}$, что равносильно $25 + 48 - 28\sqrt{6} = 49 - 28\sqrt{6} + 24$ — тождество. Таким образом, обе пары $\left(-1; 2\sqrt{7\sqrt{6}-12}\right)$ и $\left(-1; -2\sqrt{7\sqrt{6}-12}\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. Решите уравнение

$$\sin 3x - 3|\sin x| = \cos 4x - \cos 2x.$$

Ответ: $x = \pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{13}-1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение: Рассмотрим случай $t = \sin x \geq 0$. Исходное уравнение примет вид $\sin 3x - 3\sin x = -2\sin 3x \sin x$. Так как $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, то получаем $(3t - 4t^3)(1 + 2t) - 3t = 0$. Отсюда находим $t^2(4t^2 + 2t - 3) = 0$. Уравнение $4t^2 + 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} < 0$ и $t_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{4} \in (0, 1)$. Следовательно, либо $t = \sin x = t_2$ и $x = (-1)^n \arcsin t_2 + \pi n$, либо $t = \sin x = 0$ и $x = \pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t = \sin x < 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t(4t^3 + 2t^2 - 3t - 3) = t(t-1)(4t^2 + 6t + 3) = 0.$$

Уравнение $4t^2 + 6t + 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, высота SO равна 2. Точка K лежит на высоте SO, причём $KS : SO = 1 : 4$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SB. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки A до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SA.

Ответ: площадь $= \frac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние $= \frac{3}{\sqrt{5}}$, угол $= \arcsin\frac{4}{5}$.

Решение: Имеем $BO = 1$, $AB = \sqrt{2}$. Пусть $2\alpha = \angle BSD$, $2\beta = \angle ASB$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 2\beta = \frac{3}{5}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4}$.

Пусть плоскость Π пересекается с прямыми BS, DS и AS в точках M, N и P соответственно. В плоскости BSD из прямоугольного $\triangle KSM$ имеем $SM = SK\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного $\triangle NMS$ имеем $SN = \frac{SM}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $MN = SN \sin 2\alpha = \frac{4}{3\sqrt{5}}$.

В плоскости ASB из прямоугольного $\triangle PMS$ имеем $MP = SM \operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP = \frac{SM}{\cos 2\beta} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярно плоскости Π, то углом между прямой SA и плоскостью Π является $\angle SPM = \frac{\pi}{2} - 2\beta = \arcsin\frac{4}{5}$. Так как $AP = SA - SP = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки A до плоскости Π равно $AP \sin\angle SPM = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости ADS из $\triangle PNS$ по теореме косинусов находим $PN^2 = \frac{5}{16} + \frac{5}{9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{29}{9\cdot 16}$. Рассмотрим $\triangle MPN$. Пусть $\angle PMN = \varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\frac{29}{9\cdot 16} = \frac{9}{16\cdot 5} + \frac{16}{9\cdot 5} - \frac{2}{5}\cos\varphi$, откуда $\frac{145}{9\cdot 16} = \frac{9\cdot 9 + 16\cdot 16}{9\cdot 16} - 2\cos\varphi$, и $\cos\varphi = \frac{81+256-145}{18\cdot 16} = \frac{192}{18\cdot 16} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь

сечения равна $MP \cdot MN \cdot \sin\varphi = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin x - \sqrt{3}\cos y &= \frac{5}{2}, \\ \\ \sin y + \sqrt{2}\cos x &= -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$.

Решение: Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = 4.$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ и $\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) = -1$. Следовательно, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ и $y = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ и $-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$, т. е. это решения.

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AD и BC равны соответственно 6 и 10, а длина основания CD больше длины AB. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите длины оснований трапеции и радиус вписанной в неё окружности.

Ответ: $AB = 2$, $CD = 14$, $R = \frac{2\sqrt{14}}{3}$.

Решение: Пусть M, K, N, E — точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами AD, AB, BC и CD соответственно. Пусть P — середина AD, Q — середина BC, так что PQ — средняя линия трапеции. Пусть F и T — проекции точек A и B на CD. Пусть R — радиус вписанной в трапецию окружности, h — высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $AM = AK = x$, $BN = BK = y$. Тогда $DM = DE = 6 - x$, $CN = CE = 10 - y$, $AB = x + y$, $CD = DE + CE = 16 - (x + y)$, $PQ = \frac{AB+CD}{2} = 8$, $DF = DE - FE = 6 - 2x$, $CT = CE - TE = 10 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 — площади трапеций $PABQ$ и $DPQC$. Тогда $S_1 = \frac{R}{2}(AB + PQ) = \frac{R}{2}(8 + x + y)$, $S_2 = \frac{R}{2}(PQ + CD) = \frac{R}{2}(24 - x - y)$. По условию, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{11} = \frac{8+x+y}{24-(x+y)}$, откуда $x + y = 2$. Тогда основания трапеции $CD = 16 - (x + y) = 14$ и $AB = x + y = 2$. Так как $AF^2 = h^2 = AD^2 - DF^2 = 36 - (6 - 2x)^2 = 4(6x - x^2)$ и $BT^2 = h^2 = BC^2 - CT^2 = 100 - (10 - 2y)^2 = 4(10y - y^2)$, то $6x - x^2 = 10y - y^2$. Поскольку $x = 2 - y$, то $6(2 - y) - (2 - y)^2 = 10y - y^2$, откуда $y = \frac{2}{3}$, $x = \frac{4}{3}$, и $R = \sqrt{10y - y^2} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА Ф (ВЫЕЗД, ФИЗТЕХ-2010)

1. Решите неравенство

$$\log_{(x+1)}\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)\leq 1.$$

Ответ: $(-1,0)\cup\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$.

Решение: ОДЗ $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$. Если $x\in(-1,0)$, то $x+1<1$, а $\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}>1$. Следовательно, получаем $\log_{(x+1)}\left(\sqrt{x+4}+\frac{3}{4}\right)<0<1$, и поэтому $x\in(-1,0)$ — решения. Если же $x>0$, то $x+1>1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+4}\leq x+\frac{1}{4}$, которое имеет решение $x\in\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{25-y^2}-\sqrt{25-x^2} &= 1,\\ \sqrt{25-y^2}+\sqrt{25-x^2} &= x^2-2y^2+2y+3.\end{cases}$$

Ответ: $(4;3)$, $(-4;3)$, $\left(2\sqrt[4]{6};-1\right)$, $\left(-2\sqrt[4]{6};-1\right)$.

Решение: Перемножив уравнения системы, получим $x^2-y^2=x^2-2y^2+2y+3$, т. е. $y^2-2y-3=0$, откуда $y=3$ или $y=-1$.

При $y=3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-x^2}=3$, откуда $x=\pm4$. Подставляя $y=3$ и $x=\pm4$ во второе уравнение системы, получаем $4+3=7=16-18+6+3$ — тождество. Таким образом, обе пары $(-4;3)$ и $(4;3)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $y=-1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-x^2}=2\sqrt{6}-1$, откуда $x^2=4\sqrt{6}$ и $x=\pm2\sqrt[4]{6}$. Подставляя $y=-1$ и $x=\pm2\sqrt[4]{6}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6}+\sqrt{25-4\sqrt{6}}=4\sqrt{6}-4+3$, т. е. $\sqrt{25-4\sqrt{6}}=$ $=2\sqrt{6}-1$, что равносильно $25-4\sqrt{6}=24-4\sqrt{6}+1$ — тождество. Таким образом, обе пары $\left(2\sqrt[4]{6};-1\right)$ и $\left(-2\sqrt[4]{6};-1\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. Решите уравнение

$$3|\cos x|-\cos 3x=\cos 4x+\cos 2x.$$

Ответ: $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решение: Рассмотрим случай $t = \cos x \geq 0$. Исходное уравнение примет вид $3\cos x - \cos 3x = 2\cos 3x \cos x$. Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то получаем $(4t^3 - 3t)(1 + 2t) - 3t = 0$. Отсюда находим

$$t(4t^3 + 2t^2 - 3t - 3) = t(t-1)(4t^2 + 6t + 3) = 0.$$

Уравнение $4t^2 + 6t + 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, либо $t = \cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, либо $t = \cos x = 1$ и $x = 2\pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t = \cos x < 0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2(4t^2 + 2t - 3) = 0$. Уравнение $4t^2 + 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} < -1$ и $t_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{4} > 0$, т. е. в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\operatorname{arctg} 2$. Точка K лежит на высоте SO, причём $KO : SO = 3 : 4$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки B до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SB.

Ответ: площадь $= \frac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние $= \frac{3}{\sqrt{5}}$, угол $= \arcsin\frac{4}{5}$.

Решение: Имеем $CO = 1$, $SO = 2$, $CS = \sqrt{5}$. Пусть $2\alpha = \angle ASC$, $2\beta = \angle BSC$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 2\beta = \frac{3}{5}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4}$.

Пусть плоскость Π пересекается с прямыми CS, AS и BS в точках M, N и P соответственно. В плоскости ASC из прямоугольного $\triangle KSM$ имеем $SM = SK\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного $\triangle NMS$ имеем $SN = \frac{SM}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $MN = SN\sin 2\alpha = \frac{4}{3\sqrt{5}}$.

В плоскости BSC из прямоугольного $\triangle PMS$ имеем $MP = SM\operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP = \frac{SM}{\cos 2\beta} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярно плоскости Π, то углом между прямой SB и плоскостью Π является $\angle SPM = \frac{\pi}{2} - 2\beta = \arcsin\frac{4}{5}$. Так как $BP = SB - SP = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки B до плоскости Π равно $BP\sin\angle SPM = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости ABS из $\triangle PNS$ по теореме косинусов находим $PN^2 = \frac{5}{16} + \frac{5}{9} - \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{29}{9\cdot 16}$. Рассмотрим $\triangle MPN$. Пусть $\angle PMN = \varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\frac{29}{9\cdot 16} = \frac{9}{16\cdot 5} + \frac{16}{9\cdot 5} - \frac{2}{5}\cos\varphi$, откуда $\frac{145}{9\cdot 16} = \frac{9\cdot 9 + 16\cdot 16}{9\cdot 16} - 2\cos\varphi$, и $\cos\varphi = \frac{81+256-145}{18\cdot 16} = \frac{192}{18\cdot 16} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь

сечения равна $MP \cdot MN \cdot \sin\varphi = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2}\cos y &= \frac{5}{2}, \\ \\ \sqrt{2}\sin y - \cos x &= \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi s,\ k, s \in \mathbb{Z}$.

Решение: Сложив уравнения системы, получим

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ и $\sin\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Следовательно, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ и $y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi s,\ k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$ и $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, т. е. это решения.

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон AB и CD равны соответственно 15 и 9, а длина основания AD меньше длины BC. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины её диагоналей.

Ответ: $R = \sqrt{14},\ AC = 2\sqrt{30},\ BD = 2\sqrt{78}$.

Решение: Пусть M, K, N, E — точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами CD, AD, AB и BC соответственно. Пусть P — середина CD, Q — середина AB, так что PQ — средняя линия трапеции. Пусть F и T — проекции точек D и A на BC. Пусть R — радиус вписанной в трапецию окружности, h — высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $DM = DK = x$, $AN = AK = y$. Тогда $CM = CE = 9 - x$, $BN = BE = 15 - y$, $AD = x + y$, $BC = CE + BE = 24 - (x + y)$, $PQ = \frac{BC+AD}{2} = 12$, $CF = CE - FE = 9 - 2x$, $BT = BE - TE = 15 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 — площади трапеций $PDAQ$ и $CPQB$. Тогда $S_1 = \frac{R}{2}(AD + PQ) = \frac{R}{2}(12 + x + y)$, $S_2 = \frac{R}{2}(PQ + BC) = \frac{R}{2}(36 - x - y)$. По условию, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{11} = \frac{12+x+y}{36-(x+y)}$, откуда $x + y = 3$. Так как $DF^2 = h^2 = CD^2 - CF^2 = 81 - (9 - 2x)^2 = 4(9x - x^2)$ и $AT^2 = h^2 = AB^2 - BT^2 = 225 - (15 - 2y)^2 = 4(15y - y^2)$, то $9x - x^2 = 15y - y^2$. Поскольку $x = 3 - y$, то $9(3 - y) - (3 - y)^2 = 15y - y^2$, откуда $y = 1$, $x = 2$, $R = \sqrt{15y - y^2} = \sqrt{14}$, $CT = 9 - x + y = 8$, $BF = 15 - y + x = 16$, $AC = \sqrt{AT^2 + CT^2} = \sqrt{56 + 64} = 2\sqrt{30}$, $BD = \sqrt{DF^2 + BF^2} = \sqrt{56 + 256} = 2\sqrt{78}$.

РЕШЕНИЕ БИЛЕТА P (ВЫЕЗД, ФИЗТЕХ-2010)

1.Решите неравенство

$$\log_{(x+4)}\left(\sqrt{x+5}+1\right) \le 1.$$

Ответ: $(-4,-3)\cup[-1,+\infty)$.

Решение: ОДЗ $x\in(-4,-3)\cup(-3,+\infty)$. Если $x\in(-4,-3)$, то $x+4<1$, а $\sqrt{x+5}+1>1$. Следовательно, получаем $\log_{(x+4)}\left(\sqrt{x+5}+1\right)<0<1$, и поэтому $x\in(-4,-3)$ — решения. Если же $x>-3$, то $x+4>1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+5}\le x+3$, которое имеет решение $x\in[-1,+\infty)$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25-y^2}+\sqrt{25-x^2} &= 7, \\ \sqrt{25-y^2}-\sqrt{25-x^2} &= \frac{1}{7}(x^2-2y^2+2y+3). \end{cases}$$

Ответ: $(4;3)$, $(-4;3)$, $\left(2\sqrt{7\sqrt{6}-12};-1\right)$, $\left(-2\sqrt{7\sqrt{6}-12};-1\right)$.

Решение: Перемножив уравнения системы, получим $x^2-y^2=x^2-2y^2+2y+3$, т. е. $y^2-2y-3=0$, откуда $y=3$ или $y=-1$.

При $y=3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-x^2}=3$, откуда $x=\pm4$. Подставляя $y=3$ и $x=\pm4$ во второе уравнение системы, получаем $4-3=1=\frac{1}{7}(16-18+6+3)$ — тождество. Таким образом, обе пары $(-4;3)$ и $(4;3)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $y=-1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-x^2}=7-2\sqrt{6}$, откуда $x^2=28\sqrt{6}-48$ и $x=\pm2\sqrt{7\sqrt{6}-12}$. Подставляя найденные значения $y=-1$ и $x=\pm2\sqrt{7\sqrt{6}-12}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6}-\sqrt{25+48-28\sqrt{6}}=\frac{1}{7}\left(28\sqrt{6}-49\right)=4\sqrt{6}-7$, т. е. $\sqrt{25+48-28\sqrt{6}}=7-2\sqrt{6}$, что равносильно $25+48-28\sqrt{6}=49-28\sqrt{6}+24$ — тождество. Таким образом, обе пары $\left(2\sqrt{7\sqrt{6}-12};-1\right)$ и $\left(-2\sqrt{7\sqrt{6}-12};-1\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. Решите уравнение

$$3|\cos x|+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Решение: Рассмотрим случай $t = \cos x \geq 0$. Исходное уравнение примет вид $3\cos x + \cos 3x + 2\cos 3x \cos x = 0$. Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то получаем $(4t^3 - 3t)(1 + 2t) + 3t = 0$. Отсюда находим $t^2(4t^2 + 2t - 3) = 0$. Уравнение $4t^2 + + 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} < 0$ и $t_2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{4} \in (0, 1)$. Следовательно, либо $t = \cos x = t_2$ и $x = \pm \arccos t_2 + 2\pi n$, либо $t = \cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t = \cos x < 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$t(4t^3 + 2t^2 - 3t - 3) = t(t - 1)(4t^2 + 6t + 3) = 0.$$

Уравнение $4t^2 + 6t + 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро SA равно $\sqrt{5}$, угол между боковым ребром и ребром основания равен $\operatorname{arctg} 3$. Точка K лежит на высоте SO, причём $KS : SO = 1 : 4$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SD. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки C до плоскости Π и угол между плоскостью Π и прямой SC.

Ответ: площадь $= \frac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние $= \frac{3}{\sqrt{5}}$, угол $= \arcsin \frac{4}{5}$.

Решение: Имеем $AB = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$, $AO = 1$, $SO = 2$. Пусть $2\alpha = \angle BSD$, $2\beta = \angle CSD$. Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 2\beta = \frac{3}{5}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4}$.

Пусть плоскость Π пересекается с прямыми DS, BS и CS в точках M, N и P соответственно. В плоскости BSD из прямоугольного $\triangle KSM$ имеем $SM = = SK \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного $\triangle NMS$ имеем $SN = \frac{SM}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $MN = SN \sin 2\alpha = \frac{4}{3\sqrt{5}}$.

В плоскости CSD из прямоугольного $\triangle PMS$ имеем $MP = SM \operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP = \frac{SM}{\cos 2\beta} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярно плоскости Π, то углом между прямой SC и плоскостью Π является $\angle SPM = \frac{\pi}{2} - 2\beta = \arcsin \frac{4}{5}$. Так как $CP = = SC - SP = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки C до плоскости Π равно $CP \sin \angle SPM = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости BCS из $\triangle PNS$ по теореме косинусов находим $PN^2 = \frac{5}{16} + + \frac{5}{9} - \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{29}{9 \cdot 16}$. Рассмотрим $\triangle MPN$. Пусть $\angle PMN = \varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\frac{29}{9 \cdot 16} = \frac{9}{16 \cdot 5} + \frac{16}{9 \cdot 5} - \frac{2}{5} \cos \varphi$, откуда $\frac{145}{9 \cdot 16} = \frac{9 \cdot 9 + 16 \cdot 16}{9 \cdot 16} - 2\cos \varphi$, и $\cos \varphi = \frac{81 + 256 - 145}{18 \cdot 16} = \frac{192}{18 \cdot 16} = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь

сечения равна $MP \cdot MN \cdot \sin\varphi = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - \sqrt{3}\sin y &= \frac{5}{2}, \\ \\ \cos y - \sqrt{2}\sin x &= -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$.

Решение: Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$2\sin\left(x + \tfrac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left(y + \tfrac{\pi}{6}\right) = 4.$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ и $\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right) = -1$. Следовательно, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ и $y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ и $-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$, т. е. это решения.

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины её боковых сторон BC и AD равны соответственно 12 и 20, а длина основания CD меньше длины AB. Средняя линия трапеции делит её на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найдите длины оснований трапеции и радиус вписанной в неё окружности.

Ответ: $CD = 4$, $AB = 28$, $R = \frac{4\sqrt{14}}{3}$.

Решение: Пусть M, K, N, E — точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами BC, CD, AD и AB соответственно. Пусть P — середина BC, Q — середина AD, так что PQ — средняя линия трапеции. Пусть F и T — проекции точек C и D на AB. Пусть R — радиус вписанной в трапецию окружности, h — высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $CM = CK = x$, $DN = DK = y$. Тогда $BM = BE = 12 - x$, $AN = AE = 20 - y$, $CD = x + y$, $AB = AE + BE = 32 - (x + y)$, $PQ = \frac{AB+CD}{2} = 16$, $BF = BE - FE = 12 - 2x$, $AT = AE - TE = 20 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 — площади трапеций $PCDQ$ и $BPQA$. Тогда $S_1 = \frac{R}{2}(CD + PQ) = \frac{R}{2}(16 + x + y)$, $S_2 = \frac{R}{2}(PQ + AB) = \frac{R}{2}(48 - x - y)$. По условию, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{11} = \frac{16+x+y}{48-(x+y)}$, откуда $x + y = 4$. Тогда основания трапеции $AB = 32-(x+y) = 28$ и $CD = x+y = 4$. Так как $CF^2 = h^2 = BC^2 - BF^2 = 144-$ $-(12-2x)^2 = 4(12x - x^2)$ и $DT^2 = h^2 = AD^2 - AT^2 = 400-(20-2y)^2 = 4(20y-y^2)$, то $12x - x^2 = 20y - y^2$. Поскольку $x = 4 - y$, то $12(4 - y) - (4 - y)^2 = 20y - y^2$, откуда $y = \frac{4}{3}$, $x = \frac{8}{3}$, и $R = \sqrt{20y - y^2} = \frac{4\sqrt{14}}{3}$.