ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ВЫЕЗД, ЧАСТЬ I

1. Решите уравнение
$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x - 2\sin x} = \operatorname{tg}^2 x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение: Так как $\sin 3x - 2\sin x = (1 - 4\sin^2 x)\sin x = (4\cos^2 x - 3)\sin x = (2\cos 2x - 1)\sin x$, а $\cos 3x = (4\cos^2 x - 3)\cos x$, то исходное уравнение равносильно $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^2 x$ при условиях $\sin 2x \neq 0$ и $\cos 2x \neq \frac{1}{2}$. Получаем $\operatorname{tg}^3 x = 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\sin 2x = 1 \neq 0$ и $\cos 2x = 0 \neq \frac{1}{2}$. Следовательно, это решения.

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{4x^2 + \sqrt{9x^2 - y^2}} & = & \frac{3}{4} + 2x, \\ \sqrt{\frac{15}{16} + 6x - \frac{4}{3}y} & = & 1 + \frac{4}{3}y. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{48}; -\frac{3}{16}\right)$.

Решение: Из первого уравнения имеем $2x + \frac{3}{4} \geq 0$ и $\sqrt{9x^2 - y^2} = 3x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \geq 0$. Следовательно, $-y^2 = 6x\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^4$, т. е. $6x = -\left(\frac{4}{3}y\right)^2 - \frac{9}{16}$. Из второго уравнения системы имеем $\frac{4}{3}y + 1 \geq 0$ и $6x = \left(\frac{4}{3}y\right)^2 + 4y + \frac{1}{16}$. Следовательно, $2\left(\frac{4}{3}y\right)^2 + 3\left(\frac{4}{3}y\right) + \frac{5}{8} = 0$. Тогда $\frac{4}{3}y = \frac{-3\pm 2}{4}$. Если $\frac{4}{3}y = -\frac{5}{4}$, то $\frac{4}{3}y + 1 = -\frac{1}{4} < 0$, т. е. это не решение. Если же $\frac{4}{3}y = -\frac{1}{4}$, то $\frac{4}{3}y + 1 = \frac{3}{4} > 0$, $y = -\frac{3}{16}$, а $6x = -\frac{5}{8}$, т. е. $x = -\frac{5}{48}$. При этом $3x + \frac{9}{16} = \frac{1}{4} > 0$ и $2x + \frac{3}{4} = \frac{13}{24} > 0$, т. е. это решение.

3. Решите неравенство
$$\log_{|x|}\left(\sqrt{x+5} + 4\right) \geq 2\log_{x^2}(2x + 8).$$

Ответ: $(-4, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Решение: ОДЗ: $x \in (-4, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Преобразуем к виду
$$\log_{|x|}\left(\sqrt{x+5} + 4\right) \geq \log_{|x|}(2x + 8).$$

При $|x| > 1$ имеем $\sqrt{x+5} + 4 \geq 2x + 8$, т. е. $\sqrt{x+5} \geq 2x + 4$. Следовательно, либо $x < -2$, либо $x \geq -2$ и $x + 5 \geq (2x+4)^2$. Тогда при $x \geq -2$ получаем $4x^2 + 15x + 11 \leq 0$, т. е. $x \in \left[-\frac{11}{4}, -1\right]$. Следовательно, $x \leq -1$, а учитывая ОДЗ получаем $x \in (-4, -1)$ — решения. При $|x| < 1$ имеем $\sqrt{x+5} + 4 \leq 2x + 8$, т. е. $x \geq -1$. Учитывая ОДЗ получаем $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ — решения.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = 7.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM, и объём призмы.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{57}}{4}$, $\rho = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $V = 18\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Решение: Заметим, что $AB \perp BD$. Действительно, $BD = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, т. е. $AD^2 = 16 = AB^2 + BD^2 = 4 + 12$. Пусть O — центр данной сферы, h — высота призмы. Пусть P и P_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. Пусть точка P' на отрезке PP_1 такова, что $\frac{P_1P'}{P'P} = 7$. Проведем через P' плоскость $\Pi \perp P_1P$. Плоскость Π содержит точки K, L, M. Пусть A', B', C', D' — проекции точек A, B, C, D на Π, и пусть X — середина отрезка $A'B'$. Из подобия треугольников $A_1A'K$ и $BB'K$ имеем: $\frac{A'K}{B'K} = 7$. Тогда $A'K = 7t$, $B'K = t$, $A'B' = A'K + B'K = $ $= 8t = 2$, откуда $t = \frac{1}{4}$. Следовательно, $XK = \frac{A'B'}{2} - B'K = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Так как $P'X$ — средняя линия в $\triangle A'B'D'$, то $P'X \parallel B'D'$, а $B'D' \perp A'B'$. Следовательно, $P'X \perp A'B'$ и $P'X = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Тогда $P'K^2 = P'X^2 + XK^2 = 3 + \frac{9}{16} = \frac{57}{16}$. Аналогично можно установить, что $P'L^2 = P'M^2 = \frac{57}{16}$. Это означает, что P' — центр окружности радиуса $r = \frac{\sqrt{57}}{4}$, описанной около треугольника KLM, и значит O лежит на перпендикуляре к Π, проходящем через P', то есть на прямой P_1P.

Заметим, что $P'X \perp P'C'$. Действительно, $P'C' = \sqrt{3+1} = 2 = C'D' = P'D'$. Следовательно, $\angle C'P'D' = \frac{\pi}{3} = \angle P'D'C' = \angle B'A'P'$, а $\angle A'P'X = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle XP'C' = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. Поэтому введём прямоугольную систему координат $P'xyz$ с началом координат в точке P', так что ось $P'x$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'X}$, ось $P'y$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'C'} = \overrightarrow{AB}$, ось $P'z$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'P}$. Запишем координаты точек и векторов: $O(0,0,z)$, $K\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}, 0\right)$, $\overrightarrow{OK}\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}, -z\right)$, $\overrightarrow{A_1B}(0,2,h)$. Условия $OK = R = 2$ и $OK \perp A_1B$ запишутся теперь следующим образом:

$$\begin{cases} 3 + \frac{9}{16} + z^2 = 4, \\ \frac{3}{2} - hz = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $z > 0$ и тогда $z = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ — искомое расстояние, а высота призмы $h = \frac{6}{\sqrt{7}}$, т. е. искомый объём призмы равен $V = 3\sqrt{3}h = 18\sqrt{\frac{3}{7}}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ВЫЕЗД, ЧАСТЬ II

5. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E лежит на отрезке AD. Известно, что углы ABE, DBE и CBD равны, а длина отрезка DE вдвое меньше длины отрезка CD и втрое меньше длины отрезка AE. Найдите углы ABE и ACB.

Ответ: $\angle ABE = \frac{\pi}{4}$, $\angle ACB = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Решение: Пусть $\angle ABE = \angle DBE = \angle CBD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $DE = x$. Тогда $CD = 2x$ и $AE = 3x$. Так как BE является биссектриссой в $\triangle ABD$, то $\frac{AB}{BD} = = \frac{AE}{DE} = 3$, т. е. $AB = 3BD$. По теореме синусов из $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ имеем:

$$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{3BD}{\sin\beta} = \frac{6x}{\sin 3\alpha} \qquad \text{и} \qquad \frac{BD}{\sin\beta} = \frac{2x}{\sin\alpha}.$$

Следовательно, получаем $\frac{2x}{\sin 3\alpha} = \frac{2x}{\sin\alpha}$, т. е. $\sin 3\alpha = \sin\alpha$. Так как по условию справедливы неравенства $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то получаем равенство $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $\angle CBE = 2\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\triangle CBE$ прямоугольный. Тогда $\operatorname{tg}\beta = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{DC} = \frac{1}{2}$, т. е. $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

6. Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y + a &= 0, \\ x + y^2 + a &= 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{1}{4}$.

Решение: Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} y &= x^2 + a, \\ x &= -y^2 - a. \end{cases}$$

Заметим, что при фиксированном a парабола $x = -y^2 - a$ получается из параболы $y = x^2 + a$ поворотом на 90° против часовой стрелки. Следовательно, указанные параболы либо не имеют общих точек, либо касаются прямой $y = -x$ в одной и той же точке, либо имеют не меньше двух точек пересечения. Таким образом, система имеет единственное решение только в случае касания указанных парабол прямой $y = -x$ в некоторой точке с координатами $(x; y)$. Условия касания запишутся в виде $2x = -\frac{1}{2y} = -1$, т. е. $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, и $a = y - x^2 = -x - y^2 = \frac{1}{4}$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 &= yz + 2x, \\ 2y^2 &= xz + 2y, \\ 2z^2 &= xy + 2z. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} (0;0;0), \quad (1;0;0), \quad (0;1;0), \quad (0;0;1), \\ \\ (2;2;2), \quad \left(-\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{6}{7}\right), \quad \left(\frac{6}{7}; -\frac{2}{7}; \frac{6}{7}\right), \quad \left(\frac{6}{7}; \frac{6}{7}; -\frac{2}{7}\right). \end{cases}$

Решение: Имеем

$$\begin{cases} 2(x^2 - y^2) + z(x - y) &= 2(x - y), \\ 2(y^2 - z^2) + x(y - z) &= 2(y - z), \\ 2z^2 - xy - 2z &= 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (x - y)(2x + 2y + z - 2) &= 0, \\ (y - z)(2y + 2z + x - 2) &= 0, \\ 2z^2 - xy - 2z &= 0. \end{cases}$$

1) Если $x = y = z$, то $z^2 = 2z$ и $z = 0 = x = y$ или $z = 2 = x = y$.

2) Если $x = y \neq z$, то $2y + 2z + x = 2$, т. е. $3x = 2 - 2z$ и $2z^2 = x^2 + 2z$. Тогда $x = \frac{2}{3}(1 - z)$ и $2z^2 = \frac{4}{9}(z^2 - 2z + 1) + 2z$. Получаем $14z^2 - 10z - 4 = 0$ и $z = 1$ или $z = -\frac{2}{7}$. Если $z = 1$, то $x = y = 0$. Если $z = -\frac{2}{7}$, то $x = y = \frac{6}{7}$.

3) Если $z = y \neq x$, то $2x + 2y + z = 2$, т. е. $2x = 2 - 3y$ и $2y^2 = (x + 2)y = 3y - \frac{3}{2}y^2$. Тогда либо $y = 0 = z$ и $x = 1$, либо $\frac{7}{2}y = 3$. Получаем $y = \frac{6}{7} = z$ и $x = -\frac{2}{7}$.

4) Если $x \neq y \neq z$, то $2x + 2y + z = 2y + 2z + x = 2$. Следовательно, $x = z$ и $2y + 3x = 2$, т. е. $y = 1 - \frac{3}{2}x$. Получаем $2x^2 = 3x - \frac{3}{2}x^2$, т. е. либо $x = 0 = z$ и $y = 1$, либо $2x = 3 - \frac{3}{2}x$, $x = \frac{6}{7} = z$ и $y = -\frac{2}{7}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ВЫЕЗД, ЧАСТЬ I

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 4x}{4\cos x + \cos 3x} = -4\sin^3 x.$$

Ответ: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение: Имеем равенства $4\cos x + \cos 3x = (1+4\cos^2 x)\cos x = (3+2\cos 2x)\cos x$, $\sin 4x = 4\sin x\cos x\cos 2x$, $4\sin^3 x = 2(1-\cos 2x)\sin x$. Следовательно, уравнение равносильно $\Big(4\cos 2x + 2(1-\cos 2x)(3+2\cos 2x)\Big)\sin x = 0$ при условии $\cos x \neq$ $\neq 0$. Тогда либо $\sin x = 0$ и $x = \pi n$ — решения, либо $2\cos^2 2x - \cos 2x - 3 = 0$. В последнем случае либо $\cos 2x = -1$ и тогда $\cos x = \frac{1+\cos 2x}{2} = 0$, либо $\cos 2x = \frac{3}{2}$. Следовательно, в этом случае нет решений.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 4y^2}} &= \frac{3}{4} + x, \\ \sqrt{\frac{15}{16} + 3x + \frac{8}{3}y} &= 1 - \frac{8}{3}y. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{5}{24}\,;\,\frac{3}{32}\right)$.

Решение: Из первого уравнения имеем $x + \frac{3}{4} \geq 0$ и $\sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 4y^2} = \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \geq$ ≥ 0. Следовательно, $-4y^2 = 3x\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^4$, т. е. $3x = -\left(\frac{8}{3}y\right)^2 - \frac{9}{16}$. Из второго уравнения системы имеем $1 - \frac{8}{3}y \geq 0$ и $3x = \left(\frac{8}{3}y\right)^2 - 8y + \frac{1}{16}$. Следовательно, $2\left(\frac{8}{3}y\right)^2 - 3\left(\frac{8}{3}y\right) + \frac{5}{8} = 0$. Тогда $\frac{8}{3}y = \frac{3\pm 2}{4}$. Если $\frac{8}{3}y = \frac{5}{4}$, то $1 - \frac{8}{3}y = -\frac{1}{4} < 0$, т. е. это не решение. Если же $\frac{8}{3}y = \frac{1}{4}$, то $1 - \frac{8}{3}y = \frac{3}{4} > 0$, $y = \frac{3}{32}$, а $3x = -\frac{5}{8}$, т. е. $x = -\frac{5}{24}$. При этом $\frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \frac{1}{4} > 0$ и $x + \frac{3}{4} = \frac{13}{24} > 0$, т. е. это решение.

3. Решите неравенство

$$\log_{|x-1|}\left(\sqrt{x+4} + 4\right) \geq 2\log_{(x-1)^2}(2x+6).$$

Ответ: $(-3, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$.

Решение: ОДЗ: $x \in (-3,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$. Преобразуем к виду

$$\log_{|x-1|}\left(\sqrt{x+4}+4\right) \geq \log_{|x-1|}(2x+6).$$

При $|x-1|>1$ имеем $\sqrt{x+4}+4 \geq 2x+6$, т. е. $\sqrt{x+4} \geq 2x+2$. Следовательно, либо $x<-1$, либо $x \geq -1$ и $x+4 \geq (2x+2)^2$. Тогда при $x \geq -1$ получаем $4x^2+7x \leq 0$, т. е. $x \in \left[-\frac{7}{4}, 0\right]$. Следовательно, $x \leq 0$, а учитывая ОДЗ получаем $x \in (-3,0)$ — решения. При $|x-1|<1$ имеем $\sqrt{x+4}+4 \leq 2x+6$, т. е. $x \geq 0$. Учитывая ОДЗ получаем $x \in (0,1) \cup (1,2)$ — решения.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=CD=2$, $AD=4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB}=\frac{B_1L}{LC}=\frac{C_1M}{MD}=5.$$

Сфера радиуса $R=2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM, и объём призмы.

Ответ: $r=\frac{\sqrt{31}}{3}$, $\rho=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $V=12\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Решение: Заметим, что $AB \perp BD$. Действительно, $BD=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}$, т. е. $AD^2=16=AB^2+BD^2=4+12$. Пусть O — центр данной сферы, h — высота призмы. Пусть P и P_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. Пусть точка P' на отрезке PP_1 такова, что $\frac{P_1P'}{P'P}=5$. Проведем через P' плоскость $\Pi \perp P_1P$. Плоскость Π содержит точки K, L, M. Пусть A', B', C', D' — проекции точек A, B, C, D на Π, и пусть X — середина отрезка $A'B'$. Из подобия треугольников $A_1A'K$ и $BB'K$ имеем: $\frac{A'K}{B'K}=5$. Тогда $A'K=5t$, $B'K=t$, $A'B'=A'K+B'K=$ $=6t=2$, откуда $t=\frac{1}{3}$. Следовательно, $XK=\frac{A'B'}{2}-B'K=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Так как $P'X$ — средняя линия в $\triangle A'B'D'$, то $P'X \parallel B'D'$, а $B'D' \perp A'B'$. Следовательно, $P'X \perp A'B'$ и $P'X=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$. Тогда $P'K^2=P'X^2+XK^2=3+\frac{4}{9}=\frac{31}{9}$. Аналогично можно установить, что $P'L^2=P'M^2=\frac{31}{9}$. Это означает, что P'

— центр окружности радиуса $r = \frac{\sqrt{31}}{3}$, описанной около треугольника KLM, и значит O лежит на перпендикуляре к Π, проходящем через P', то есть на прямой P_1P.

Заметим, что $P'X \perp P'C'$. Действительно, $P'C' = \sqrt{3+1} = 2 = C'D' = P'D'$. Следовательно, $\angle C'P'D' = \frac{\pi}{3} = \angle P'D'C' = \angle B'A'P'$, а $\angle A'P'X = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle XP'C' = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. Поэтому введём прямоугольную систему координат $P'xyz$ с началом координат в точке P', так что ось $P'x$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'X}$, ось $P'y$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'C'} = \overrightarrow{AB}$, ось $P'z$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'P}$. Запишем координаты точек и векторов: $O(0,0,z)$, $K\left(\sqrt{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$, $\overrightarrow{OK}\left(\sqrt{3}, \frac{2}{3}, -z\right)$, $\overrightarrow{A_1B}(0,2,h)$. Условия $OK = R = 2$ и $OK \perp A_1B$ запишутся теперь следующим образом:

$$\begin{cases} 3 + \frac{4}{9} + z^2 &= 4, \\ \frac{4}{3} - hz &= 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $z > 0$ и тогда $z = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ — искомое расстояние, а высота призмы $h = \frac{4}{\sqrt{5}}$, т. е. искомый объём призмы равен $V = 3\sqrt{3}h = 12\sqrt{\frac{3}{5}}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ВЫЕЗД, ЧАСТЬ II

5. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E лежит на отрезке AD. Известно, что углы ABE, DBE и CBD равны, а длина отрезка DE вдвое меньше длины отрезка CD и втрое меньше длины отрезка AE. Найдите углы DBE и BDA.

Ответ: $\angle DBE = \frac{\pi}{4}$, $\angle BDA = \operatorname{arctg} 3$.

Решение: Пусть $\angle ABE = \angle DBE = \angle CBD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $DE = x$. Тогда $CD = 2x$ и $AE = 3x$. Так как BE является биссектриссой в $\triangle ABD$, то $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DE} = 3$, т. е. $AB = 3BD$. По теореме синусов из $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ имеем:

$$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{3BD}{\sin\beta} = \frac{6x}{\sin 3\alpha} \qquad \text{и} \qquad \frac{BD}{\sin\beta} = \frac{2x}{\sin\alpha}.$$

Следовательно, получаем $\frac{2x}{\sin 3\alpha} = \frac{2x}{\sin\alpha}$, т. е. $\sin 3\alpha = \sin\alpha$. Так как по условию справедливы неравенства $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то получаем равенство $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $\angle ABD = 2\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\triangle ABD$ прямоугольный. Тогда $\operatorname{tg}\angle BDA = \frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DE} = 3$, т. е. $\angle BDA = \operatorname{arctg} 3$.

6. Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x - y^2 - a &= 0, \\ x^2 + y + a &= 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{1}{4}$.

Решение: Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x &= y^2 + a, \\ y &= -x^2 - a. \end{cases}$$

Заметим, что при фиксированном a парабола $x = y^2 + a$ получается из параболы $y = -x^2 - a$ поворотом на 90° против часовой стрелки. Следовательно, указанные параболы либо не имеют общих точек, либо касаются прямой $y = -x$ в одной и той же точке, либо имеют не меньше двух точек пересечения. Таким образом, система имеет единственное решение только в случае касания указанных парабол прямой $y = -x$ в некоторой точке с координатами $(x; y)$. Условия касания запишутся в виде $-2x = \frac{1}{2y} = -1$, т. е. $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, и $a = x - y^2 = -y - x^2 = \frac{1}{4}$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 &= yz - 2x, \\ 2y^2 &= -xz + 2y, \\ 2z^2 &= -xy + 2z. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} (0;0;0), \quad (-1;0;0), \quad (0;1;0), \quad (0;0;1), \\ \\ (-2;2;2), \quad \left(\frac{2}{7};\frac{6}{7};\frac{6}{7}\right), \quad \left(-\frac{6}{7};-\frac{2}{7};\frac{6}{7}\right), \quad \left(-\frac{6}{7};\frac{6}{7};-\frac{2}{7}\right). \end{cases}$

Решение: Имеем

$$\begin{cases} 2(x^2 - y^2) - z(x+y) &= -2(x+y), \\ 2(y^2 - z^2) - x(y-z) &= 2(y-z), \\ 2z^2 + xy - 2z &= 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y)(2x - 2y - z + 2) &= 0, \\ (y-z)(2y + 2z - x - 2) &= 0, \\ 2z^2 + xy - 2z &= 0. \end{cases}$$

1) Если $-x = y = z$, то $z^2 = 2z$ и $z = 0 = -x = y$ или $z = 2 = -x = y$.

2) Если $-x = y \neq z$, то $2y + 2z - x = 2$, т. е. $-3x = 2 - 2z$ и $2z^2 = x^2 + 2z$. Тогда $x = \frac{2}{3}(z-1)$ и $2z^2 = \frac{4}{9}(z^2 - 2z + 1) + 2z$. Получаем $14z^2 - 10z - 4 = 0$ и $z = 1$ или $z = -\frac{2}{7}$. Если $z = 1$, то $-x = y = 0$. Если $z = -\frac{2}{7}$, то $-x = y = \frac{6}{7}$.

3) Если $z = y \neq -x$, то $-2x + 2y + z = 2$, т. е. $2x = 3y - 2$ и $2y^2 = (2-x)y = 3y - \frac{3}{2}y^2$. Тогда либо $y = 0 = z$ и $x = -1$, либо $\frac{7}{2}y = 3$. Получаем $y = \frac{6}{7} = z$ и $x = \frac{2}{7}$.

4) Если $-x \neq y \neq z$, то $-2x + 2y + z = 2y + 2z - x = 2$. Следовательно, $-x = z$ и $2y - 3x = 2$, т. е. $y = 1 + \frac{3}{2}x$. Получаем $2x^2 = -3x - \frac{3}{2}x^2$, т. е. либо $x = 0 = z$ и $y = 1$, либо $2x = -3 - \frac{3}{2}x$, $x = -\frac{6}{7} = -z$ и $y = -\frac{2}{7}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ВЫЕЗД, ЧАСТЬ I

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2\cos x} = \operatorname{ctg}^2 x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение: Так как $\cos 3x + 2\cos x = (4\cos^2 x - 1)\cos x = (2\cos 2x + 1)\cos x$, а $\sin 3x = (3 - 4\sin^2 x)\sin x = (4\cos^2 x - 1)\sin x$, то исходное уравнение равносильно $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}^2 x$ при условиях $\sin 2x \neq 0$ и $\cos 2x \neq -\frac{1}{2}$. Получаем $\operatorname{tg}^3 x = 1$, т. е. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\sin 2x = 1 \neq 0$ и $\cos 2x = 0 \neq -\frac{1}{2}$. Следовательно, это решения.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \sqrt{x^2 - 9y^2}} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x, \\ \sqrt{\frac{15}{16} - 2x - 4y} = 1 + 4y. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5}{16}\,;\, -\frac{1}{16}\right)$.

Решение: Из первого уравнения имеем $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \geq 0$ и $\sqrt{x^2 - 9y^2} = -x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \geq 0$. Следовательно, $-9y^2 = -2x\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^4$, т. е. $-2x = -(4y)^2 - \frac{9}{16}$. Из второго уравнения системы имеем $4y + 1 \geq 0$ и $-2x = (4y)^2 + 12y + \frac{1}{16}$. Следовательно, $2(4y)^2 + 3(4y) + \frac{5}{8} = 0$. Тогда $4y = \frac{-3 \pm 2}{4}$. Если $4y = -\frac{5}{4}$, то $4y + 1 = -\frac{1}{4} < 0$, т. е. это не решение. Если же $4y = -\frac{1}{4}$, то $4y + 1 = \frac{3}{4} > 0$, $y = -\frac{1}{16}$, а $-2x = -\frac{5}{8}$, т. е. $x = \frac{5}{16}$. При этом $-x + \frac{9}{16} = \frac{1}{4} > 0$ и $-\frac{2}{3}x + \frac{3}{4} = \frac{13}{24} > 0$, т. е. это решение.

3. Решите неравенство

$$\log_{|x|}\left(\sqrt{5 - x} + 4\right) \geq 2\log_{x^2}(8 - 2x).$$

Ответ: $(-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 4)$.

Решение: ОДЗ: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 4)$. Преобразуем к виду

$$\log_{|x|}\left(\sqrt{5 - x} + 4\right) \geq \log_{|x|}(8 - 2x).$$

При $|x|>1$ имеем $\sqrt{5-x}+4\geq 8-2x$, т. е. $\sqrt{5-x}\geq 4-2x$. Следовательно, либо $x>2$, либо $x\leq 2$ и $5-x\geq(4-2x)^2$. Тогда при $x\leq 2$ получаем $4x^2-15x+11\leq 0$, т. е. $x\in\left[1,\frac{11}{4}\right]$. Следовательно, $x\geq 1$, а учитывая ОДЗ получаем $x\in(1,4)$ — решения. При $|x|<1$ имеем $\sqrt{5-x}+4\leq 8-2x$, т. е. $x\leq 1$. Учитывая ОДЗ получаем $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ — решения.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB=BC=CD=2$, $AD=4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB}=\frac{B_1L}{LC}=\frac{C_1M}{MD}=\frac{7}{3}.$$

Сфера радиуса $R=2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM, и объём призмы.

Ответ: $r=\frac{\sqrt{79}}{5}$, $\rho=\frac{\sqrt{21}}{5}$, $V=\frac{12}{\sqrt{7}}$.

Решение: Заметим, что $AB\perp BD$. Действительно, $BD=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}$, т. е. $AD^2=16=AB^2+BD^2=4+12$. Пусть O — центр данной сферы, h — высота призмы. Пусть P и P_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. Пусть точка P' на отрезке PP_1 такова, что $\frac{P_1P'}{P'P}=\frac{7}{3}$. Проведем через P' плоскость $\mathit{\Pi}\perp P_1P$. Плоскость $\mathit{\Pi}$ содержит точки K, L, M. Пусть A', B', C', D' — проекции точек A, B, C, D на $\mathit{\Pi}$, и пусть X — середина отрезка $A'B'$. Из подобия треугольников $A_1A'K$ и $BB'K$ имеем: $\frac{A'K}{B'K}=\frac{7}{3}$. Тогда $A'K=7t$, $B'K=3t$, $A'B'=A'K+B'K=$ $=10t=2$, откуда $t=\frac{1}{5}$. Следовательно, $XK=\frac{A'B'}{2}-B'K=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$. Так как $P'X$ — средняя линия в $\triangle A'B'D'$, то $P'X\parallel B'D'$, а $B'D'\perp A'B'$. Следовательно, $P'X\perp A'B'$ и $P'X=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$. Тогда $P'K^2=P'X^2+XK^2=3+\frac{4}{25}=\frac{79}{25}$. Аналогично можно установить, что $P'L^2=P'M^2=\frac{79}{25}$. Это означает, что P' — центр окружности радиуса $r=\frac{\sqrt{79}}{5}$, описанной около треугольника KLM, и значит O лежит на перпендикуляре к $\mathit{\Pi}$, проходящем через P', то есть на прямой P_1P.

Заметим, что $P'X \perp P'C'$. Действительно, $P'C' = \sqrt{3+1} = 2 = C'D' = P'D'$. Следовательно, $\angle C'P'D' = \frac{\pi}{3} = \angle P'D'C' = \angle B'A'P'$, а $\angle A'P'X = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle XP'C' = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. Поэтому введём прямоугольную систему координат $P'xyz$ с началом координат в точке P', так что ось $P'x$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'X}$, ось $P'y$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'C'} = \overrightarrow{AB}$, ось $P'z$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'P}$. Запишем координаты точек и векторов: $O(0,0,z)$, $K\left(\sqrt{3}, \frac{2}{5}, 0\right)$, $\overrightarrow{OK}\left(\sqrt{3}, \frac{2}{5}, -z\right)$, $\overrightarrow{A_1B}(0,2,h)$. Условия $OK = R = 2$ и $OK \perp A_1B$ запишутся теперь следующим образом:

$$\begin{cases} 3 + \frac{4}{25} + z^2 = 4, \\ \frac{4}{5} - hz = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $z > 0$ и тогда $z = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ — искомое расстояние, а высота призмы $h = \frac{4}{\sqrt{21}}$, т. е. искомый объём призмы равен $V = 3\sqrt{3}h = \frac{12}{\sqrt{7}}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ВЫЕЗД, ЧАСТЬ II

5. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E лежит на отрезке AD. Известно, что углы ABE, DBE и CBD равны, а длина отрезка DE вдвое меньше длины отрезка CD и втрое меньше длины отрезка AE. Найдите углы CBD и BAC.

Ответ: $\angle CBD = \frac{\pi}{4}$, $\angle BAC = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Решение: Пусть $\angle ABE = \angle DBE = \angle CBD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $DE = x$. Тогда $CD = 2x$ и $AE = 3x$. Так как BE является биссектриссой в $\triangle ABD$, то $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DE} = 3$, т. е. $AB = 3BD$. По теореме синусов из $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ имеем:

$$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{3BD}{\sin\beta} = \frac{6x}{\sin 3\alpha} \qquad \text{и} \qquad \frac{BD}{\sin\beta} = \frac{2x}{\sin\alpha}.$$

Следовательно, получаем $\frac{2x}{\sin 3\alpha} = \frac{2x}{\sin\alpha}$, т. е. $\sin 3\alpha = \sin\alpha$. Так как по условию справедливы неравенства $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то получаем равенство $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $\angle ABD = 2\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\triangle ABD$ прямоугольный. Тогда $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BD}{AB} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{3}$, т. е. $\angle BAC = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

6. Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 + a = 0, \\ x^2 + y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{1}{4}$.

Решение: Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x = -y^2 - a, \\ y = -x^2 - a. \end{cases}$$

Заметим, что при фиксированном a парабола $x = -y^2 - a$ получается из параболы $y = -x^2 - a$ поворотом на 90° по часовой стрелке. Следовательно, указанные параболы либо не имеют общих точек, либо касаются прямой $y = x$ в одной и той же точке, либо имеют не меньше двух точек пересечения. Таким образом, система имеет единственное решение только в случае касания указанных парабол прямой $y = x$ в некоторой точке с координатами $(x; y)$. Условия касания запишутся в виде $-2x = -\frac{1}{2y} = 1$, т. е. $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, и $a = -x - y^2 = -y - x^2 = \frac{1}{4}$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 &= yz + x, \\ 2y^2 &= xz + y, \\ 2z^2 &= xy + z. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} (0;0;0), \quad \left(\frac{1}{2};0;0\right), \quad \left(0;\frac{1}{2};0\right), \quad \left(0;0;\frac{1}{2}\right), \\ \\ (1;1;1), \quad \left(-\frac{1}{7};\frac{3}{7};\frac{3}{7}\right), \quad \left(\frac{3}{7};-\frac{1}{7};\frac{3}{7}\right), \quad \left(\frac{3}{7};\frac{3}{7};-\frac{1}{7}\right). \end{cases}$

Решение: Имеем

$$\begin{cases} 2(x^2 - y^2) + z(x - y) &= x - y, \\ 2(y^2 - z^2) + x(y - z) &= y - z, \\ 2z^2 - xy - z &= 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (x - y)(2x + 2y + z - 1) &= 0, \\ (y - z)(2y + 2z + x - 1) &= 0, \\ 2z^2 - xy - z &= 0. \end{cases}$$

1) Если $x = y = z$, то $z^2 = z$ и $z = 0 = x = y$ или $z = 1 = x = y$.

2) Если $x = y \neq z$, то $2y + 2z + x = 1$, т. е. $3x = 1 - 2z$ и $2z^2 = x^2 + z$. Тогда $x = \frac{1}{3}(1 - 2z)$ и $2z^2 = \frac{1}{9}(4z^2 - 4z + 1) + z$. Получаем $14z^2 - 5z - 1 = 0$ и $z = \frac{1}{2}$ или $z = -\frac{1}{7}$. Если $z = \frac{1}{2}$, то $x = y = 0$. Если $z = -\frac{1}{7}$, то $x = y = \frac{3}{7}$.

3) Если $z = y \neq x$, то $2x + 2y + z = 1$, т. е. $2x = 1 - 3y$ и $2y^2 = (x+1)y = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}y^2$. Тогда либо $y = 0 = z$ и $x = \frac{1}{2}$, либо $\frac{7}{2}y = \frac{3}{2}$. Получаем $y = \frac{3}{7} = z$ и $x = -\frac{1}{7}$.

4) Если $x \neq y \neq z$, то $2x + 2y + z = 2y + 2z + x = 1$. Следовательно, $x = z$ и $2y + 3x = 1$, т. е. $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$. Получаем $2x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2$, т. е. либо $x = 0 = z$ и $y = \frac{1}{2}$, либо $2x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$, $x = \frac{3}{7} = z$ и $y = -\frac{1}{7}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ВЫЕЗД, ЧАСТЬ I

1. Решите уравнение

$$\frac{\sin 4x}{4\sin x - \sin 3x} = 4\cos^3 x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение: Имеем равенства $4\sin x - \sin 3x = (1+4\sin^2 x)\sin x = (3-2\cos 2x)\sin x$, $\sin 4x = 4\sin x\cos x\cos 2x$, $4\cos^3 x = 2(1+\cos 2x)\cos x$. Следовательно, уравнение равносильно $\Big(4\cos 2x - 2(1+\cos 2x)(3-2\cos 2x)\Big)\cos x = 0$ при условии $\sin x \neq$ $\neq 0$. Тогда либо $\cos x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ — решения, либо $2\cos^2 2x + \cos 2x - 3 = 0$. В последнем случае либо $\cos 2x = 1$ и тогда $\sin x = \frac{1-\cos 2x}{2} = 0$, либо $\cos 2x = -\frac{3}{2}$. Следовательно, в этом случае нет решений.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2}{9} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}}} &= \frac{3}{4} - \frac{x}{3}, \\ \sqrt{\frac{15}{16} - x + \frac{2}{3}y} &= 1 - \frac{2}{3}y. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5}{8}\,;\,\frac{3}{8}\right)$.

Решение: Из первого уравнения имеем $\frac{3}{4} - \frac{x}{3} \geq 0$ и $\sqrt{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}} = -\frac{x}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \geq$ ≥ 0. Следовательно, $-\frac{y^2}{4} = -x\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^4$, т. е. $-x = -\left(\frac{2}{3}y\right)^2 - \frac{9}{16}$. Из второго уравнения системы имеем $1 - \frac{2}{3}y \geq 0$ и $-x = \left(\frac{2}{3}y\right)^2 - 2y + \frac{1}{16}$. Следовательно, $2\left(\frac{2}{3}y\right)^2 - 3\left(\frac{2}{3}y\right) + \frac{5}{8} = 0$. Тогда $\frac{2}{3}y = \frac{3\pm 2}{4}$. Если $\frac{2}{3}y = \frac{5}{4}$, то $1 - \frac{2}{3}y = -\frac{1}{4} < 0$, т. е. это не решение. Если же $\frac{2}{3}y = \frac{1}{4}$, то $1 - \frac{2}{3}y = \frac{3}{4} > 0$, $y = \frac{3}{8}$, а $x = \frac{5}{8}$. При этом $\frac{9}{16} - \frac{x}{2} = \frac{1}{4} > 0$ и $\frac{3}{4} - \frac{x}{3} = \frac{13}{24} > 0$, т. е. это решение.

3. Решите неравенство

$$\log_{|x-1|}\left(\sqrt{6-x}+4\right) \geq 2\log_{(x-1)^2}(10-2x).$$

Ответ: $(0,1) \cup (1,2) \cup (2,5)$.

Решение: ОДЗ: $x \in (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup (2,5)$. Преобразуем к виду

$$\log_{|x-1|}\left(\sqrt{6-x}+4\right) \geq \log_{|x-1|}(10-2x).$$

При $|x-1| > 1$ имеем $\sqrt{6-x}+4 \geq 10-2x$, т. е. $\sqrt{6-x} \geq 6-2x$. Следовательно, либо $x > 3$, либо $x \leq 3$ и $6-x \geq (6-2x)^2$. Тогда при $x \leq 3$ получаем $4x^2-23x+$ $+30 \leq 0$, т. е. $x \in \left[2, \frac{15}{4}\right]$. Следовательно, $x \geq 2$, а учитывая ОДЗ получаем $x \in (2,5)$ — решения. При $|x-1| < 1$ имеем $\sqrt{6-x}+4 \leq 10-2x$, т. е. $x \leq 2$. Учитывая ОДЗ получаем $x \in (0,1) \cup (1,2)$ — решения.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $AB = BC = CD = 2$, $AD = 4$. Точки K, L, M лежат на отрезках A_1B, B_1C, C_1D соответственно так, что

$$\frac{A_1K}{KB} = \frac{B_1L}{LC} = \frac{C_1M}{MD} = 9.$$

Сфера радиуса $R = 2$ касается прямых A_1B, B_1C, C_1D в точках K, L, M соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, расстояние от центра сферы до плоскости KLM, и объём призмы.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{91}}{5}$, $\rho = \frac{3}{5}$, $V = 8\sqrt{3}$.

Решение: Заметим, что $AB \perp BD$. Действительно, $BD = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$, т. е. $AD^2 = 16 = AB^2 + BD^2 = 4 + 12$. Пусть O — центр данной сферы, h — высота призмы. Пусть P и P_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. Пусть точка P' на отрезке PP_1 такова, что $\frac{P_1P'}{P'P} = 9$. Проведем через P' плоскость $\Pi \perp P_1P$. Плоскость Π содержит точки K, L, M. Пусть A', B', C', D' — проекции точек A, B, C, D на Π, и пусть X — середина отрезка $A'B'$. Из подобия треугольников $A_1A'K$ и $BB'K$ имеем: $\frac{A'K}{B'K} = 9$. Тогда $A'K = 9t$, $B'K = t$, $A'B' = A'K + B'K =$ $= 10t = 2$, откуда $t = \frac{1}{5}$. Следовательно, $XK = \frac{A'B'}{2} - B'K = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Так как $P'X$ — средняя линия в $\triangle A'B'D'$, то $P'X \parallel B'D'$, а $B'D' \perp A'B'$. Следовательно, $P'X \perp A'B'$ и $P'X = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$. Тогда $P'K^2 = P'X^2 + XK^2 = 3 + \frac{16}{25} = \frac{91}{25}$. Аналогично можно установить, что $P'L^2 = P'M^2 = \frac{91}{25}$. Это означает, что P'

— центр окружности радиуса $r = \frac{\sqrt{91}}{5}$, описанной около треугольника KLM, и значит O лежит на перпендикуляре к Π, проходящем через P', то есть на прямой P_1P.

Заметим, что $P'X \perp P'C'$. Действительно, $P'C' = \sqrt{3+1} = 2 = C'D' = P'D'$. Следовательно, $\angle C'P'D' = \frac{\pi}{3} = \angle P'D'C' = \angle B'A'P'$, а $\angle A'P'X = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$. Тогда $\angle XP'C' = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, что и требовалось. Поэтому введём прямоугольную систему координат $P'xyz$ с началом координат в точке P', так что ось $P'x$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'X}$, ось $P'y$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'C'} = \overrightarrow{AB}$, ось $P'z$ сонаправлена с вектором $\overrightarrow{P'P}$. Запишем координаты точек и векторов: $O(0,0,z)$, $K\left(\sqrt{3}, \frac{4}{5}, 0\right)$, $\overrightarrow{OK}\left(\sqrt{3}, \frac{4}{5}, -z\right)$, $\overrightarrow{A_1B}(0,2,h)$. Условия $OK = R = 2$ и $OK \perp A_1B$ запишутся теперь следующим образом:

$$\begin{cases} 3 + \frac{16}{25} + z^2 = 4, \\ \frac{8}{5} - hz = 0. \end{cases}$$

Из второго равенства $z > 0$ и тогда $z = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$ — искомое расстояние, а высота призмы $h = \frac{8}{3}$, т. е. искомый объём призмы равен $V = 3\sqrt{3}h = 8\sqrt{3}$.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ “ФИЗТЕХ-2009”

ВЫЕЗД, ЧАСТЬ II

5. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, а точка E лежит на отрезке AD. Известно, что углы ABE, DBE и CBD равны, а длина отрезка DE вдвое меньше длины отрезка CD и втрое меньше длины отрезка AE. Найдите углы ABC и BEC.

Ответ: $\angle ABC = \frac{3\pi}{4}$, $\angle BEC = \operatorname{arctg} 2$.

Решение: Пусть $\angle ABE = \angle DBE = \angle CBD = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $DE = x$. Тогда $CD = 2x$ и $AE = 3x$. Так как BE является биссектриссой в $\triangle ABD$, то $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{DE} = 3$, т. е. $AB = 3BD$. По теореме синусов из $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ имеем:

$$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{3BD}{\sin\beta} = \frac{6x}{\sin 3\alpha} \qquad \text{и} \qquad \frac{BD}{\sin\beta} = \frac{2x}{\sin\alpha}.$$

Следовательно, получаем $\frac{2x}{\sin 3\alpha} = \frac{2x}{\sin\alpha}$, т. е. $\sin 3\alpha = \sin\alpha$. Так как по условию справедливы неравенства $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то получаем равенство $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\angle ABC = 3\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Следовательно, $\angle CBE = 2\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\triangle CBE$ прямоугольный. Тогда $\operatorname{tg}\angle BEC = \frac{BC}{BE} = \frac{DC}{DE} = 2$, т. е. $\angle BEC = \operatorname{arctg} 2$.

6. Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x - y^2 - a = 0, \\ x^2 - y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{1}{4}$.

Решение: Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x = y^2 + a, \\ y = x^2 + a. \end{cases}$$

Заметим, что при фиксированном a парабола $x = y^2 + a$ получается из параболы $y = x^2 + a$ поворотом на 90° по часовой стрелке. Следовательно, указанные параболы либо не имеют общих точек, либо касаются прямой $y = x$ в одной и той же точке, либо имеют не меньше двух точек пересечения. Таким образом, система имеет единственное решение только в случае касания указанных парабол прямой $y = x$ в некоторой точке с координатами $(x; y)$. Условия касания запишутся в виде $2x = \frac{1}{2y} = 1$, т. е. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, и $a = x - y^2 = y - x^2 = \frac{1}{4}$.

7. Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x^2 & = & -yz + x, \\ 2y^2 & = & xz - y, \\ 2z^2 & = & -xy + z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\begin{array}{cccc} (0;0;0), & \left(\frac{1}{2};0;0\right), & \left(0;-\frac{1}{2};0\right), & \left(0;0;\frac{1}{2}\right), \\ \\ (1;-1;1), & \left(-\frac{1}{7};-\frac{3}{7};\frac{3}{7}\right), & \left(\frac{3}{7};\frac{1}{7};\frac{3}{7}\right), & \left(\frac{3}{7};-\frac{3}{7};-\frac{1}{7}\right). \end{array}\right.$

Решение: Имеем

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2(x^2 - y^2) + z(x + y) & = & x + y, \\ 2(y^2 - z^2) - x(y + z) & = & -(y + z), \\ 2z^2 + xy - z & = & 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} (x + y)(2x - 2y + z - 1) & = & 0, \\ (y + z)(2y - 2z - x + 1) & = & 0, \\ 2z^2 + xy - z & = & 0. \end{array}\right.$$

1) Если $x = -y = z$, то $z^2 = z$ и $z = 0 = x = y$ или $z = 1 = x = -y$.

2) Если $x = -y \neq z$, то $2z - 2y + x = 1$, т. е. $3x = 1 - 2z$ и $2z^2 = x^2 + z$. Тогда $x = \frac{1}{3}(1 - 2z)$ и $2z^2 = \frac{1}{9}(4z^2 - 4z + 1) + z$. Получаем $14z^2 - 5z - 1 = 0$ и $z = \frac{1}{2}$ или $z = -\frac{1}{7}$. Если $z = \frac{1}{2}$, то $x = y = 0$. Если $z = -\frac{1}{7}$, то $x = -y = \frac{3}{7}$.

3) Если $z = -y \neq x$, то $2x - 2y + z = 1$, т. е. $2x = 1 + 3y$ и $2y^2 = -(x + 1)y = -\frac{3}{2}y - \frac{3}{2}y^2$. Тогда либо $y = 0 = z$ и $x = \frac{1}{2}$, либо $\frac{7}{2}y = -\frac{3}{2}$. Получаем $y = -\frac{3}{7} = -z$ и $x = -\frac{1}{7}$.

4) Если $x \neq -y \neq z$, то $2x - 2y + z = 2z - 2y + x = 1$. Следовательно, $x = z$ и $-2y + 3x = 1$, т. е. $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Получаем $2x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2$, т. е. либо $x = 0 = z$ и $y = -\frac{1}{2}$, либо $2x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$, $x = \frac{3}{7} = z$ и $y = \frac{1}{7}$.