ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «ФИЗТЕХ-2008»

1. Решить неравенство

$$\log_{\left(\frac{2-x}{1-x}\right)}(4-x) \leq 2.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x}{|\sin 2x|} = \frac{3}{4}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \frac{42}{x+y}, \\ xy - x = 16. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC медиана $BM = 2$, угол ABM равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, угол CBM равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Найти стороны AB, BC и биссектрису BE треугольника ABC.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y^4 - 2y^2 = \ln x \\ 2\operatorname{arctg} x + \arcsin y = 0. \end{cases}$$

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{15}{14}$ с центром O касается ребер AS, BS, AD, BC пирамиды $ABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q, и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает ее в точке H, $\frac{AB}{PQ} = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $\frac{AS}{LS} = \frac{3}{2}$. Найти $\angle SAB$, $\angle SBH$, высоту пирамиды и ее объем.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ «ФИЗТЕХ-2008»

1. Решить неравенство

$$\log_{\left(\frac{2-x}{1-x}\right)}(4-x) \leq 2.$$

Ответ: $[0,1) \cup \left(2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Решение. ОДЗ: $x \in (-\infty, 1) \cup (2,4)$. При $x \in (2,4)$ имеем $\frac{2-x}{1-x} < 1$, поэтому $4-x \geq \left(\frac{2-x}{1-x}\right)^2$, т. е. $(4-x)(1-2x+x^2) \geq 4-4x+x^2$. Отсюда $-x^3+5x^2-5x \geq 0$. Так как в рассматриваемом случае $x > 0$, то получаем $x^2-5x+5 \leq 0$, т. е. $x \in \left[\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$. Так как справедливы неравенства $1 < \frac{5-\sqrt{5}}{2} < 2 < \frac{5+\sqrt{5}}{2} < 4$, то получаем $x \in \left(2, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right]$ — решения. При $x \in (-\infty, 1)$ имеем $\frac{2-x}{1-x} > 1$, поэтому $4-x \leq \left(\frac{2-x}{1-x}\right)^2$, т. е. $-x^3+5x^2-5x \leq 0$. Следовательно, $x(x^2-5x+5) \geq 0$. Так как при $x < 1$ выполнено $x^2-5x+5 > 0$, то $x \in [0,1)$ — решения.

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x}{|\sin 2x|} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $-\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Так как $\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ и $\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$, то $\sin^3 x \cos 3x + {}$ $+ \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{4}\sin 4x$ и уравнение равносильно $\frac{\sin 4x}{|\sin 2x|} = 1$. Если $\sin 2x > 0$, то получаем $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Следовательно, учитывая неравенство $\sin 2x > 0$, получаем $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Если $\sin 2x < 0$, то получаем $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Следовательно, учитывая неравенство $\sin 2x < 0$, получаем $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{\frac{x}{x+y}} & = & \frac{42}{x+y}, \\ xy - x & = & 16. \end{cases}$$

Ответ: $(4;5)$, $\left(-\frac{1+\sqrt{133}}{2}; \frac{41-8\sqrt{133}}{33}\right)$.

Решение. Пусть $x+y > 0$, $x > 0$. Из первого уравнения системы получаем $x(x+y) + \sqrt{x(x+y)} = 42$. Обозначив $t = \sqrt{x(x+y)} > 0$, получим $t^2 + t - 42 =$ $= 0$. Следовательно, $t = 6$ ($t = -7$ не подходит по условию $t > 0$). Получаем

$x(x+y)=36$. Так как из второго уравнения системы $xy=x+16$, то x^2+ $+x-20=0$, откуда $x=4$ ($x=-5$ не подходит по условию $x>0$). Тогда $y=\frac{16}{x}+1=5$. Пусть $x+y<0$, $x<0$. Из первого уравнения системы получаем $x(x+y)-\sqrt{x(x+y)}=42$. Обозначив $t=\sqrt{x(x+y)}>0$, получим $t^2-t-42=$ $=0$. Следовательно, $t=7$ ($t=-6$ не подходит по условию $t>0$). Получаем $x(x+y)=49$. Так как из второго уравнения системы $xy=x+16$, то x^2+x- $-33=0$, откуда $x=-\frac{1+\sqrt{133}}{2}$ ($x=\frac{-1+\sqrt{133}}{2}$ не подходит по условию $x<0$). Тогда $y=\frac{16}{x}+1=-\frac{32}{1+\sqrt{133}}+1=\frac{41-8\sqrt{133}}{33}$.

4. В треугольнике ABC медиана $BM=2$, угол ABM равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, угол CBM равен $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Найти стороны AB, BC и биссектрису BE треугольника ABC.

Ответ: $AB=\frac{4}{\sqrt{13}}$, $BC=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$, $BE=\frac{8\sqrt{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{13}(1+2\sqrt{2})}$.

Решение. Обозначим $\angle ABM=\alpha$, $\angle CBM=\beta$. По теореме синусов из треугольников ABM и CBM находим $\frac{AB}{\sin\angle AMB}=\frac{AM}{\sin\alpha}$ и $\frac{BC}{\sin\angle CMB}=\frac{MC}{\sin\beta}$. Так как $\angle AMB+\angle CMB=\pi$ и $AM=MC$, то $\sin\angle AMB=\sin\angle CMB$ и $\frac{AB}{BC}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Так как $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle CBM}$, то $AB\cdot BC\cdot\sin(\alpha+\beta)=AB\cdot BM\cdot\sin\alpha+$ $+BC\cdot BM\cdot\sin\beta$. Так как $BC\sin\beta=AB\sin\alpha$, то $AB^2\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)\sin(\alpha+\beta)=$ $=2AB\cdot BM\cdot\sin\alpha$, т. е. $AB=\frac{2BM\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Тогда $BC=\frac{2BM\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. В нашем случае $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$. Тогда $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\cos\beta=\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{10}{13\sqrt{2}}+\frac{3}{13\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $AB=\frac{4}{\sqrt{13}}$, $BC=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$. Далее, биссектриса $BE=\frac{2\cdot AB\cdot BC}{AB+BC}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{2\cdot4\cdot8\sqrt{2}}{\sqrt{13}\left(4+8\sqrt{2}\right)}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\frac{8\sqrt{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{13}(1+2\sqrt{2})}$.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y^4-2y^2 = \ln x \\ 2\operatorname{arctg}x+\arcsin y = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(1;-1)$.

Решение. Положим $f(x)=x-\ln x$; тогда $f'(x)=1-1/x$. Таким образом, $f(x)$ убывает на промежутке $(0,1]$ и возрастает на промежутке $[1,+\infty)$, значит $f(x)\geq f(1)=1$, причем равенство достигается только при $x=1$. Имеем $x-$ $-\ln x=-y^4+2y^2\Leftrightarrow x-\ln x=(-y^4+2y^2-1)+1\Leftrightarrow x-\ln x=-(y^2-1)^2+1$ $\Leftrightarrow y^2-1=0$ и $x=1$. Из двух возможных пар $(1,\pm1)$ уравнению $2\operatorname{arctg}x+$ $+\arcsin y=0$ удовлетворяет одна пара $(1,-1)$.

6. В основании пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Сфера ω радиуса $\frac{15}{14}$ с центром O касается ребер AS, BS, AD, BC пирамиды $ABCD$ соответственно в точках K, L, M, N, пересекает ребро AB в точках P и Q, и касается грани CDS. Известно, что прямая SO перпендикулярна плоскости $ABCD$ и пересекает ее в точке H, $\frac{AB}{PQ} = \frac{4}{\sqrt{7}}$, $\frac{AS}{LS} = \frac{3}{2}$. Найти $\angle SAB$, $\angle SBH$, высоту пирамиды и ее объем.

Ответ: $\arccos\frac{4}{9}$, $\arccos\frac{5}{9}$, $h = 2$, $V = \frac{64}{21}$.

Решение. Пусть O — центр ω, T и R — середины ребер AB и CD соответственно; ω_1 — окружность в пересечении ω с гранью $ABCD$ (ω_1 касается отрезков AD и BC в точках M и N и пересекает отрезок AB в точках P и Q), ω_2 — окружность в пересечении ω с гранью ABS (ω_2 касается отрезков AS и BS в точках K и L и пересекает отрезок AB в точках P и Q), O' — центр ω_2. По условию, SH — высота пирамиды, и H является проекцией O на грань $ABCD$, поэтому H — центр ω_1. Так как $AD \parallel BC$, то MN — диаметр, перпендикулярный AD. Проекция l прямой SH на грань ABS является высотой треугольника ABS; кроме того l содержит O' (так как O' — проекция O на ABS). Так как O' равноудалена от сторон AS и BS, то $l = SO'$ — биссектриса треугольника ABS. Отсюда следует, что $\triangle ABS$ — равнобедренный ($AS = BS$) и $l = ST$. Так как $SK = SL$ (отрезки касательных), то $AK = BL$. Грань ABS симметрична относительно ST, поэтому точки P и Q симметричны относительно T. Пусть для определенности P лежит между A и Q. Так как $AM = AK = BL = BN$, то $AB \parallel MN$, $ABCD$ — прямоугольник, и пирамида симметрична относительно плоскости STR; это в частности означает, что ω касается SR в некоторой точке U.

Пусть $AT = BT = t$, $AM = AK = BL = BN = a$.

1) Имеем: $AS = \frac{3}{2}LS = \frac{3}{2}KS = \frac{3}{2}(AS - a) \Rightarrow AS = 3a$, $AT/PT = AB/PQ \Rightarrow PT = QT = \frac{\sqrt{7}t}{4}$. Далее, по теореме о касательной и секущей находим $a = AK = \sqrt{AP \cdot AQ} = \sqrt{(AT - PT)(AT + QT)} = \sqrt{AT^2 - PT^2} = \sqrt{t^2 - \frac{7t^2}{16}} = \frac{3t}{4}$. Отсюда $\cos\angle SAB = AT/AS = \frac{t}{3a} = \frac{4}{9}$.

2) $AH = \sqrt{MH^2 + AM^2} = \sqrt{AT^2 + AM^2} = \sqrt{t^2 + a^2} = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + a^2} = \frac{5a}{3}$. Отсюда $\cos\angle SBH = \cos\angle SAH = AH/AS = \left(\frac{5a}{3}\right) \big/ (3a) = \frac{5}{9}$.

3) Из треугольника SAH: $h = SH = \sqrt{AS^2 - AH^2} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{5a}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{14}a}{3}$. Из подобных треугольников SOK и SAH: $OK/SK = \left(\frac{15}{14}\right) \big/ (2a) = \left(\frac{5a}{3}\right) \Big/ \left(\frac{2\sqrt{14}a}{3}\right) \Rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow h = 2$.

4) OK и OU — радиусы сферы, поэтому треугольники SOK и SOU равны, значит $\angle OSK = \angle OSU$, отсюда треугольники SRH и SAH равны. Значит, $AD = BC = TR = TH + HR = AM + AH = a + \frac{5a}{3} = \frac{8a}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. $AB = 2t = \frac{8a}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$. Объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} \cdot AD \cdot AB \cdot SH = \frac{64}{21}$.