Дистанционный этап олимпиады “Физтех-2011”
11 класс. Решения задач

1. Находясь в гостях у Кролика, Винни-Пух за первый час съел 40% всего запаса меда Кролика, а Пятачок и Кролик вместе за это же время съели лишь 300 граммов меда. За следующий час Винни-Пух съел 80% от оставшегося меда, а Пятачок и Кролик съели 100 граммов меда на двоих. В итоге у Кролика осталось 800 грамм меда. Сколько килограммов меда было у Кролика до визита Винни-Пуха?

   Ответ. 8

   Решение. Пусть у Кролика было x килограммов меда. Тогда после первого часа осталось $0,6 \cdot 1000x - 300 = 600x - 300$ граммов меда. А после второго

   $$0,2 \cdot (600x - 300) - 100 = 120x - 160.$$

   Поэтому $120x - 160 = 800$, то есть $x = \frac{960}{120} = 8$.

2. Найдите значение выражения

   $$\frac{1}{a^2 - ac - ab + bc} + \frac{2}{b^2 - ab - bc + ac} + \frac{1}{c^2 - ac - bc + ab}$$

   при $a = 1,67$, $b = 1,71$ и $c = 0,46$.

   Ответ. 20

   Решение. Упростим исходное выражение:

   $$\frac{1}{a^2 - ac - ab + bc} + \frac{2}{b^2 - ab - bc + ac} + \frac{1}{c^2 - ac - bc + ab} =$$
   $$= \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{2}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} =$$
   $$= \frac{(c-b) + 2(a-c) + (b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{a-c}{(a-b)(b-c)(c-a)} =$$
   $$= -\frac{1}{(a-b)(b-c)} = -\frac{1}{(-0,04) \cdot 1,25} = 25 \cdot \frac{4}{5} = 20.$$

3. Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 180, которые не делятся на 17.

   Ответ. 15355

   Решение. Сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 180, равна $\frac{180 \cdot 181}{2} = 16290$. Наибольшее натуральное число, не превосходящее 180, которое делится на 17 – это $170 = 17 \cdot 10$. Поэтому сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 180, которые делятся на 17, равна $17 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 935$. Отсюда следует, что сумма всех натуральных чисел, не превосходящих 180, которые не делятся на 17, равна $16290 - 935 = 15355$.

4. Найдите последнюю цифру числа 2^{2129}.

   Ответ. 2

   Решение. Проследим за последней цифрой степеней двоек:

$$
\begin{aligned}
2^1 &= \mathbf{2};\\
2^2 &= \mathbf{4};\\
2^3 &= \mathbf{8};\\
2^4 &= 1\mathbf{6};\\
2^5 &= 3\mathbf{2};\\
2^6 &= 6\mathbf{4};\\
2^7 &= 12\mathbf{8};\\
2^8 &= 25\mathbf{6};\\
&\dots
\end{aligned}
$$

   Так как последняя цифра произведения двух натуральных чисел зависит лишь от последней цифры каждого из сомножителей, то последние цифры степеней двоек будут повторяться с периодом 4. Заметим, что $2129 = 2128 + 1 = 532 \cdot 4 + 1$. Поэтому последняя цифра числа 2^{2129} совпадает с последней цифрой числа 2^1, то есть равна 2.

5. Найдите положительное число p, такое что прямая $y = 4x + p$ и координатные оси образуют треугольник, площадь которого равна 72.

   Ответ. 24

   Решение. Прямая $y = 4x + p$ пересекает оси в точках $(0; p)$ и $\left(-\frac{p}{4}; 0\right)$. Получается прямоугольный треугольник с катетами p и $\frac{p}{4}$. Его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot p \cdot \frac{p}{4} = \frac{p^2}{8}$. Значит, $p^2 = 72 \cdot 8 = 24^2$. Нас интересует лишь положительное p. Значит, $p = 24$.

6. В колбе было 230 г 60%-го раствора кислоты. Лаборант отлил из колбы некоторое количество раствора и затем добавил в нее столько же воды, чтобы получить 48%-ый раствор кислоты. Сколько граммов воды добавил лаборант?

   Ответ. 46

   Решение. Пусть x – это искомая величина. После того как из колбы отлили x грамм раствора, в ней осталось $(230 - x) \cdot 0,6 = 138 - 0,6x$ грамм "чистой кислоты". Значит, после доливания воды доля кислоты составляет $\frac{138 - 0,6x}{230}$. Осталось решить уравнение

$$\frac{138 - 0,6x}{230} = 0,48 \quad \Leftrightarrow \quad 138 - 0,6x = 110,4 \quad \Leftrightarrow \quad 0,6x = 27,6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 46.$$

7. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии в 3 раза меньше суммы последующих пяти ее членов. Найдите третий член этой прогрессии, если седьмой член равен 52.

Ответ. 20

Решение. Пусть первый член прогрессии равен a, а разность прогрессии равна d. Тогда

$$3(a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)) = (a+5d)+(a+6d)+(a+7d)+(a+8d)+(a+9d).$$

То есть

$$15a + 30d = 5a + 35d \quad \Leftrightarrow \quad 2a = d \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{d}{2}.$$

Седьмой член прогрессии равен $a + 6d = \dfrac{13}{2}d$. Значит, $d = \dfrac{52}{13/2} = 8$. Поэтому $a = 4$. Отсюда получаем, что третий член последовательности равен $a + 2d = 20$.

8. Две стороны треугольника равны 34 и 32, а медиана, проведенная к третьей, равна 17. Найдите площадь треугольника.

Ответ. 480

Решение. Пусть данный треугольник – ABC, $AB = 34$, $BC = 32$, медиана $BM = 17$. Пусть N – середина AB. Тогда MN – средняя линия треугольника ABC, поэтому $MN = 16$. Кроме того $BN = \dfrac{AB}{2} = 17$. Значит, треугольник MNB равнобедренный. Его высота, опущенная на основание MN, находится по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{17^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2} = 15.$$

Значит, площадь треугольника MNB равна $\dfrac{16 \cdot 15}{2} = 120$. Осталось заметить, что площадь треугольника ABC в четыре раза больше.

9. От автостанции в одном направлении выезжают два велосипедиста с интервалом в 2 ч, причем скорость первого равна 30 км/ч, а скорость второго – 20 км/ч. Через 2 ч после выезда второго велосипедиста, из того же города выезжает мотоциклист и догоняет второго велосипедиста, а еще через 3 ч догоняет первого. Какова скорость мотоциклиста (в км/ч)?

Ответ. 60

Решение. Пусть скорость мотоциклиста равна v, а t – время, через которое он догонит второго велосипедиста. Тогда

$$\begin{cases} vt = 20(t+2); \\ v(t+3) = 30(t+7); \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} vt = 40 + 20t; \\ vt + 3v = 210 + 30t. \end{cases}$$

Отсюда $3v = 170 + 10t$. Поэтому

$$\frac{(170+10t)t}{3} = 40 + 20t \quad \Leftrightarrow \quad 10t^2 + 110t - 120 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + 11t - 12 = 0.$$

То есть $t = 1$ или $t = -12$ (второй ответ не подходит из физических соображений). Поэтому $v = \dfrac{170+10}{3} = 60$.

10. Найдите значение выражения

$$\frac{x^2 - xy + 4x - 5y - 5}{x^2 - 4y^2} \cdot \frac{x^3 - 2x^2y - 5x^2 + 10xy + 25x - 50y}{x^3 + 125}$$

при $x = 5,4$ и $y = 2,3$.

Ответ. 0,21

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{x^2 - xy + 4x - 5y - 5}{x^2 - 4y^2} \cdot \frac{x^3 - 2x^2y - 5x^2 + 10xy + 25x - 50y}{x^3 + 125} =$$

$$= \frac{x^2 - xy - x + 5x - 5y - 5}{(x-2y)(x+2y)} \cdot \frac{x(x^2 - 5x + 25) - 2y(x^2 - 5x + 25)}{(x+5)(x^2 - 5x + 25)} =$$

$$= \frac{x(x-y-1) + 5(x-y-1)}{(x-2y)(x+2y)} \cdot \frac{(x-2y)(x^2 - 5x + 25)}{(x+5)(x^2 - 5x + 25)} =$$

$$= \frac{(x+5)(x-y-1)(x-2y)(x^2 - 5x + 25)}{(x-2y)(x+2y)(x+5)(x^2 - 5x + 25)} =$$

$$= \frac{x-y-1}{x+2y} = \frac{5,4 - 2,3 - 1}{5,4 + 4,6} = \frac{2,1}{10} = 0,21.$$

11. Известно, что параболы $y = x^2 + bx + c$ и $y = -x^2 + px + q$ пересекаются в точке $(1;1)$. Проекция вершины второй параболы на ось x на 4 правее, чем проекция вершины первой параболы на эту же ось. Одна из точек пересечения первой параболы с осью x – $(2;0)$. Найдите коэффициент q.

Ответ. -10

Решение. Из первого условия следует, что $1+b+c = -1+p+q = 1$. Второе условие означает, что $\dfrac{p}{2} = -\dfrac{b}{2} + 4$. А третье условие можно переписать как $4 + 2b + c = 0$. Получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} b + c = 0; \\ p + q = 2; \\ b + p = 8; \\ 2b + c = -4. \end{cases}$$

Из первого и последнего равенства получаем $b = -4$. Из третьего $p = 12$. Из второго $q = -10$.

12. При каком натуральном значении n числа n, $n+15$, $46n-30$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

Ответ. 3

Решение. Из характеристического свойства геометрической прогрессии следует, что

$$(n+15)^2 = n(46n-30) \quad \Leftrightarrow \quad n^2+30n+225 = 46n^2-30n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 45n^2-60n-225=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3n^2-4n-15=0.$$

Поэтому $n=3$ или $n=-\dfrac{5}{3}$. Но нас интересуют лишь натуральные n.

13. Найдите x и y, такие что выполняется равенство

$$x^2+12xy+52y^2-8y+1=0.$$

Ответ. $(-1,5; 0,25)$

Решение. Преобразуем левую часть равенства:

$$x^2+12xy+52y^2-8y+1 = x^2+12xy+36y^2+16y^2-8y+1 = (x+6y)^2+(4y-1)^2.$$

Сумма квадратов двух чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно нулю. Поэтому $y=\dfrac{1}{4}$, а $x=-6y=-\dfrac{3}{2}$.

14. Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Известно, что $BC=16$, $CA=55$, $\angle AOB=120^\circ$. Найдите сторону AB.

Ответ. 49

Решение. Так как вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и центральный угол AOB, то $\angle ACB = \dfrac{\angle AOB}{2} = 60^\circ$. Из теоремы косинусов имеем

$$AB^2 = 16^2+55^2-2\cdot16\cdot55\cdot\frac{1}{2} = 256+3025-880 = 2401 = 49^2.$$

15. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырехугольников с вершинами в этих точках?

Ответ. 1200; 2970

Решение. Треугольники бывают двух типов: с двумя вершинами на первой прямой и с одной на второй, и наоборот. Из 10 точек выбрать две можно $\dfrac{10\cdot9}{2}=45$ способами. Поэтому треугольников первого типа $45\cdot12=540$ штук. Аналогично, треугольников второго типа $\dfrac{12\cdot11}{2}\cdot10=660$ штук. Итого, 1200 треугольников.

Четырехугольники же однозначно задаются четырьмя вершинами, две из которых на одной прямой, и еще две – на другой. Значит, всего различных четырехугольников

$$\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2} = 45 \cdot 66 = 2970.$$

16. Числа a, b и c таковы, что $a + b + c = 13$ и $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} = 0,4$. Найдите значение выражения $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}$.

Ответ. 2,2

Решение. Перемножив исходные равенства, получим

$$\frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} = 5,2$$

или

$$3 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 5,2.$$

Из последнего равенства получаем ответ.

17. Простые числа p, q, r таковы, что $p+q+r = 118$, $pq+qr+rp = 2075$. Найдите произведение pqr.

Ответ. 3686

Решение. Так как сумма трех целых чисел четна, то они не могут быть все нечетными. Единственное четное простое число – это 2. Пусть, например, $r = 2$ (очевидно, что все переменные равноправны). Тогда условие примет вид:

$$\begin{cases} p + q + 2 = 118; \\ pq + 2p + 2q = 2075; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 116; \\ pq + 2(p + q) = 2075; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p + q = 116; \\ pq = 1843. \end{cases}$$

Так как $pq = 1843$, а $r = 2$, то $pqr = 3686$.

Можно было и не раскладывать 1843 на простые множители, а просто выразить в первом уравнении q через p, подставить во второе, и решить квадратное уравнение на p.

18. Хорды AB и CD пересекаются в точке X. M – точка пересечения биссектрисы угла BXD с хордой BD. Найдите отрезок BM, если $BD = 27$, а площади треугольников CXB и AXD относятся как $25 : 16$.

Ответ. 15

Решение. Треугольники CXB и AXD подобны (по трем углам), с коэффициентом подобия $\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{5}{4}$. Поэтому $\dfrac{BX}{XD} = \dfrac{5}{4}$. По теореме о биссектрисе угла $\dfrac{BM}{MD} = \dfrac{BX}{XD} = \dfrac{5}{4}$. Значит, $\dfrac{BM}{BD} = \dfrac{5}{9}$. Следовательно, $BM = 27 \cdot \dfrac{5}{9} = 15$.

19. Сколько различных целых значений принимает функция $17\sin x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$?

Ответ. 32

Решение. Область определенения функции $x \neq \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. На области определения функция совпадает с $17\sin x + 1$. Поэтому множество значений исходной функции $E = (-16; 1) \cup (1; 18)$, то есть содержит 32 целых значения.

20. Отец и сын катаются на коньках по кругу с постоянными скоростями. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменил направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 9 раз чаще. Во сколько раз отец бегает быстрее сына?

Ответ. 1,25

Решение. Пусть u и v – это соответственно скорости отца и сына, а L – длина одного круга. Тогда условие задачи можно переписать следующим образом

$$\frac{L}{u-v} = 9 \cdot \frac{L}{u+v} \quad \Leftrightarrow \quad u + v = 9(u-v) \quad \Leftrightarrow \quad 10v = 8u.$$

Поэтому $\dfrac{u}{v} = \dfrac{10}{8} = 1,25$.

21. Целые числа m и n таковы, что $4m + 5n = mn - 9$. Найдите, какое наибольшее значение может принимать m.

Ответ. 34

Решение. Перенесем все в одну сторону:

$$mn - 4m - 5n - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m(n-4) - 5(n-4) - 20 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m-5)(n-4) = 29.$$

Так как 29 простое число, то его можно представить в виде произведения двух целых чисел лишь четырьмя способами:

$$29 = 1 \cdot 29 = 29 \cdot 1 = (-1) \cdot (-29) = (-29) \cdot (-1).$$

Осталось лишь решить четыре линейные системы:

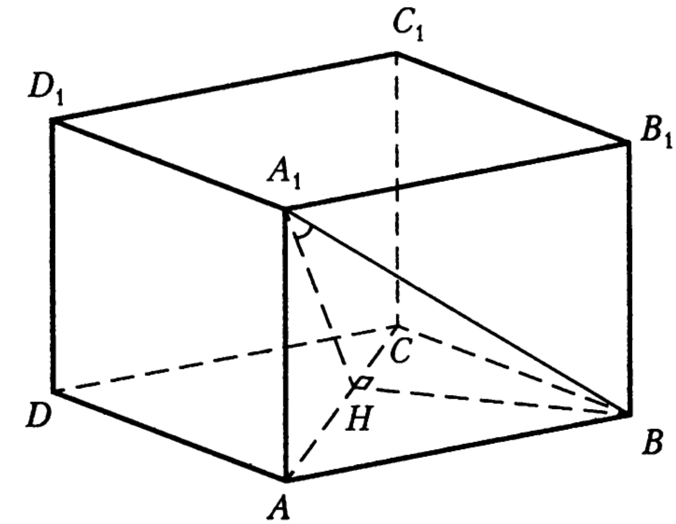
$$\begin{cases} m - 5 = 1; \\ n - 4 = 29; \end{cases} \quad \begin{cases} m - 5 = 29; \\ n - 4 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} m - 5 = -1; \\ n - 4 = -29; \end{cases} \quad \begin{cases} m - 5 = -29; \\ n - 4 = -1. \end{cases}$$

Получаем четыре решения $(6; 33)$, $(34; 5)$, $(4; -25)$, $(-24; 3)$.

22. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите синус угла между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 9$, $AB = 12$ и $BC = 16$.

Ответ. 0,64

Решение. Из точки B проведем перпендикуляр BH к прямой AC. Тогда A_1H – проекция отрезка A_1B на плоскость AA_1C, а значит, нужно найти синус угла BA_1H.



В прямоугольном треугольнике ABC высота

$$BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12 \cdot 16}{\sqrt{12^2 + 16^2}} = \frac{12 \cdot 16}{20} = \frac{48}{5}.$$

В прямоугольном треугольнике A_1AB гипотенуза $A_1B = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$.

В прямоугольном треугольнике A_1HB:

$$\sin \angle BA_1H = \frac{BH}{A_1B} = \frac{48/5}{15} = \frac{16}{25}.$$

23. Найдите наименьшее значение выражения

$$3\sin^2\alpha + 7\cos^2\alpha + 8\sin^4\alpha + 12\cos^4\alpha.$$

Ответ. 9,2

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$3\sin^2\alpha + 7\cos^2\alpha + 8\sin^4\alpha + 12\cos^4\alpha =$$

$$= 3\sin^2\alpha + 7\cdot(1-\sin^2\alpha) + 8\sin^4\alpha + 12\cdot(1-\sin^2\alpha)^2 =$$

$$= 7 - 4\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha + 12\cdot(1 - 2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha) =$$

$$= 20\sin^4\alpha - 28\sin^2\alpha + 19 = 20\cdot\left(\sin^2\alpha - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{92}{100}.$$

Так как $20\cdot\left(\sin^2\alpha - \frac{7}{10}\right)^2 \geqslant 0$ при всех α, и обращается в нуль при $\sin^2\alpha = \frac{7}{10}$, то наименьшее значение выражения равно $\frac{92}{100}$.

24. Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких что точка $(14; 22)$ содержится внутри (но не на границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты – натуральны и меньше, чем 31.

Ответ. 30576

Решение. Очевидно, что прямоугольник однозначно задают координаты его левого нижнего и правого верхнего углов. Пусть их координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. При этом x_1 – любое натуральное число от 1 до 13 (13 вариантов); y_1 – любое натуральное число от 1 до 21 (21 вариант); x_2 – любое натуральное число от 15 до 28 (14 вариантов); y_2 – любое натуральное число от 23 до 30 (8 вариантов). Итого, $13 \cdot 21 \cdot 14 \cdot 8 = 30576$.

25. Два трехзначных числа таковы, что сумма остальных трехзначных чисел ровно в 770 раз больше одного из них. Найдите наибольшее из этих чисел.

Ответ. 641

Решение. Пусть это числа m и n. Сумма всех трехзначных чисел, кроме этих равна

$$100 + 101 + 102 + \ldots + 999 - m - n = \frac{(100 + 999) \cdot 900}{2} - m - n = 494550 - m - n.$$

По условию она равна $770m$ (или $770n$, этот случай аналогичен). Таким образом,

$$494550 - m - n = 770m \quad \Leftrightarrow \quad 494550 = 771m + n.$$

Если разделить 494550 на 771 с остатком, то получится:

$$494550 = 641 \cdot 771 + 339.$$

Значит, пара $(641; 339)$ подходит. Но, если число m уменьшить на натуральное число k, то n уменьшится на $771k$ и станет отрицательным, а если m увеличить на k – число n перестанет быть трехзначиным.

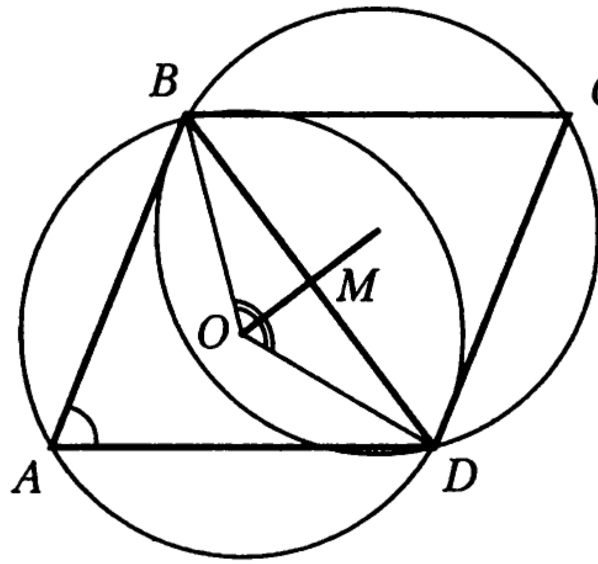
26. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = 50$, $BC = 21$ и $\cos\angle BAD = \dfrac{3}{5}$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAD и BCD.

Ответ. 30,75

Решение. Так как треугольники BAD и BCD равны, а центры обеих окружностей лежат на серединном перпендикуляре к BD, то расстояние между центами равно удвоенному расстоянию от центра одной из них до отрезка BD.

Рассмотрим треугольник BAD. В нем $AB = 50$, $AD = 21$ и $\cos\angle BAD = \dfrac{3}{5}$, поэтому по теореме косинусов получаем

$$BD^2 = 50^2 + 21^2 - 2 \cdot 50 \cdot 21 \cdot \frac{3}{5} = 2500 + 441 - 1260 = 1681 = 41^2.$$



Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника BAD. Тогда центральный угол BOD в два раза больше вписанного угла BAD. Поэтому OM – расстояние от точки O до отрезка BD равно

$$\frac{BD}{2} \cdot \operatorname{ctg} \angle BAD = \frac{41}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{123}{8}.$$

Следовательно искомое расстояние равно $\frac{123}{4}$.

27. Найдите количество целочисленных решений системы неравенств:

$$\begin{cases} (x-0,3)^2 \leqslant 440, \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$$

Ответ. 22

Решение. Первое неравенство равносильно следующему

$$|x-0,3| \leqslant \sqrt{440} \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{440}+0,3 \leqslant x \leqslant \sqrt{440}+0,3.$$

Легко убедиться в том, что $21 < \sqrt{440}+0,3 < 22$ и $-20 < -\sqrt{440}+0,3 < -21$. Поэтому нас интересуют лишь целые x из диапазона от -20 до 21.

Единственный целый аргумент, при котором $\sin x$ обращается в нуль – это нуль. А так как функция $\sin x$ нечетная, то $\sin n$ и $\sin(-n)$ разного знака для любого натурального n, поэтому из каждой пары чисел n и $-n$ второму неравенству системы удовлетворяет ровно одно. Осталось лишь заметить, что $6\pi < 21 < 7\pi$, поэтому $\sin 21 > 0$.

28. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 13$, $BC = 15$. Высота пирамиды имеет длину 6, а основание высоты попадает на прямую BC. Найдите площадь плоского сечения, проходящего через точку A параллельно прямой BC и делящего высоту пирамиды в отношении $3:2$, считая от вершины S?

Ответ. 18

Решение. По формуле Герона найдем площадь основания пирамиды:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24.$$

Значит, высота AH треугольника ABC равна $\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{16}{5}$.

Пусть B' и C' – вершины получившегося сечения. Тогда $B'C' = \dfrac{3}{5}BC = 9$.

Пусть AH' – высота треугольника $AB'C'$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах треугольник AHH' прямоугольный. При этом отрезок HH' параллелен высоте пирамиды и равен $\dfrac{2}{5}$ от ее длины, то есть $HH' = \dfrac{12}{5}$. По теореме Пифагора

$$AH' = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = 4.$$

Поэтому $S_{\triangle AB'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$.

29. Найдите наибольшее натуральное n, для которого число 6500! делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Напомним, что $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$.

Ответ. 82

Решение. Заметим, что $80^2 < 6500 < 81^2$. Значит 6500! точно делится на k^k при $k \leqslant 80$ (так как среди чисел от 1 до 6500 есть по крайней мере k чисел делящихся на k), и точно не делится на 83^{83} (так как 83 простое число, и среди чисел от 1 до 6500 меньше 83 чисел делящихся на 83, и нет ни одного, которое делится на 83^2). Осталось лишь проверить делится ли 6500! на 81^{81} и 82^{82}.

Среди чисел от 1 до 6500 более 2000 делятся на 3. Значит, 6500! делится на 3^{2000}, а 3^{2000} делится на $81^{81} = 3^{324}$.

Среди чисел от 1 до 6500 более 100 делятся на 41, и более 3000 делятся на 2. Значит, 6500! делится на $2^{3000} \cdot 41^{100}$, а $2^{3000} \cdot 41^{100}$ делится на $82^{82} = 2^{82} \cdot 41^{82}$.

30. В Городском Собрании 24 депутата. Любые двое из них либо дружат, либо враждуют. Причем известно, что каждый дружит ровно с 7 другими. Каждые три депутата образуют комиссию. Найдите общее число комиссий, в которых все три члена попарно дружат или все трое попарно враждуют.

Ответ. 680

Решение. Рассмотрим полный граф на 24 вершинах, у которого каждая вершина соответствует одному из депутатов. При этом покрасим ребро в белый цвет, если соответствующие депутаты дружат, и в черный – если враждуют. Требуется посчитать количество одноцветных треугольников.

Посчитаем вместо этого сколько будет не одноцветных треугольников. Для этого подсчитаем количество пар разноцветных смежных (то есть имеющих общую вершину) ребер. Из каждой вершины выходит 7 белых и $23 - 7 = 16$ черных ребер. Поэтому у каждой вершины $7 \cdot 16 = 112$ пар разноцветных ребер. Итого, $24 \cdot 112 = 2688$ пар разноцветных смежных ребер. Заметим теперь, что каждому не одноцветному треугольнику соответствуют ровно две пары смежных разноцветных ребер. То есть всего $\frac{2688}{2} = 1344$ не одноцветных треугольника.

Всего же треугольников $C_{24}^3 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2024$. Поэтому одноцветных треугольников $2024 - 1344 = 680$.