Дистанционный этап олимпиады “Физтех-2011”
11 класс. Решения задач

1. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 540.

   Ответ. 2569

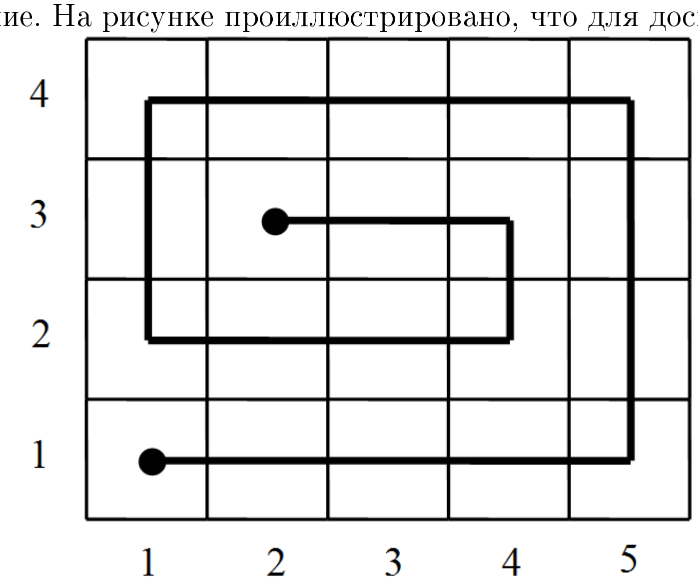
   Решение. Заметим, что $540 = 5 \cdot 3^3 \cdot 2^2$. Цифра 5 обязана быть цифрой искомого числа. Произведение оставшихся цифр равно 108. То есть их не менее трех, и искомое число имеет не менее четырех цифр. Очевидно, что в наименьшем числе нет цифры 1, и все цифры идут в порядке возрастания. Попытаемся найти наименьшее четырехзначное число с произведением цифр 540. Пусть его первая цифра 2. В нем есть цифра 5, а произведение оставшихся равно $54 = 3^3 \cdot 2$. То есть две другие цифры — 9 и 6. Наименьшее число с такими цифрами — 2569. Если же первая цифра больше 2, то число будет больше, чем 2569.

2. Вписанная в прямоугольный треугольник окружность делит точкой касания один из катетов на отрезки длины 6 и 7. Найдите длину гипотенузы.

   Ответ. 85

   Решение. Обозначим вершины треугольника A, B, C ($\angle C = 90°$), а точки касания со сторонами BC, AC, AB как L, M, N соответственно. Тогда $CM = 6$, $AM = 7$. По свойству касательной $CL = 6$, $AN = 7$, $BL = BN$. Пусть $BN = x$, тогда $AC = 13$, $BC = 6 + x$, $AB = 7 + x$, и по теореме Пифагора получим: $13^2 + (6 + x)^2 = (7 + x)^2$, откуда $x = 78$ и $AB = 85$.

3. Строки доски 1001×2012 пронумерованы от 1 до 1001 снизу вверх, а столбцы пронумерованы от 1 до 2012 слева направо. Змейка начинает ползти из левой нижней клетки доски направо. Змейка не может выходить за пределы доски, и посещать одну клетку более одного раза. Если змейка не может продолжить движение, она поворачивает налево и далее следует по прямой. Таким образом, змейка пройдет доску по спирали, побывав в каждой клетке ровно по разу. Найдите сумму номеров строки и столбца клетки, в которой змейка закончит движение. На рисунке проиллюстрировано, что для доски 4×5 ответ $3 + 2 = 5$.



Ответ. 2013

Решение. Высота доски – нечетное число, и высота меньше ширины. Поэтому движение окончится в средней (501-й) горизонтали. Всего будет 1001 горизонтальный ход и 1000 вертикальных. Горизонтальные ходы с нечетными номерами будут вправо. Поэтому 1001 ход змейки вправо будет таким, что справа останется ровно $\frac{1000}{2} = 500$ запрещенных клеток. То есть змейка остановится в вертикали с номером $2012 - 500 = 1512$. Тогда искомая сумма номеров есть $1512 + 501 = 2013$.

4. Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основание которой прямоугольник $ABCD$. Известно, что $SB \perp ABC$, $AS = \sqrt{3}$, $SD = \sqrt{7}$, а $\angle SAB = 30°$. Найдите периметр $ABCD$.

Ответ. 7

Решение. Известно, что $AB \perp AD$ (так как $ABCD$ – прямоугольник), отсюда по теореме о трех перпендикулярах (так как $SB \perp ABC$) получаем, что $\angle SAD$ – прямой. Из треугольника ASD по теореме Пифагора:

$$AD = \sqrt{SD^2 - AS^2} = \sqrt{7 - 3} = 2.$$

Из треугольника ASB получаем, что $AB = \sqrt{3}\cos 30° = 1,5$.

$$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 7.$$

5. Найдите наименьшее значение параметра a, при котором уравнения $5x^2 - 11x + 2 = 0$ и $2x^2 - (a + 2)x + a = 0$ имеют общий корень.

Ответ. 0,4

Решение. Заметим, что корнями уравнения $5x^2 - 11x + 2 = 0$ будут числа $x_1 = 2$ и $x_2 = 0,2$. Найдем a, при котором число x_1 будет корнем второго уравнения. Подставим $x_1 = 2$. Получим

$$8 - (a + 2) \cdot 2 + a = 0,$$

откуда $a = 4$. Аналогично, подставив $x_2 = 0,2$, получим $a = 0,4$. Значит, наименьшее $a = 0,4$.

6. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги. Длины отрезков, соединяющих середины двух из этих дуг с серединами хорд, стягивающих эти дуги, равны 2 и 9. Найдите периметр треугольника, если радиус окружности равен 17.

Ответ. 80

Решение. Пусть A, B, C – вершины треугольника, O – центр описанной окружности, M – середина хорды AB (соответствующая отрезку длины 2), N — середина хорды BC (соответствующая отрезку длины 9). Заметим, что OM и ON — серединные перпендикуляры, и их продолжения пересекают соответствующие дуги окружности в серединах. Тогда $OA = OB = OC = 17$, $OM = 17 - 2 = 15$, $ON = 17 - 9 = 8$. Треугольник

MBO прямоугольный, $OB = 17$, $OM = 15$. Откуда $BM = 8$. Аналогично, из прямоугольного треугольника ONB получаем, что $BN = 15$. Значит, $\triangle MOB = \triangle NBO$. Отсюда $\angle MOB = \angle NBO$. Тогда

$$90^\circ = \angle MOB + \angle MBO = \angle NBO + \angle MBO = \angle ABC.$$

Значит, треугольник ABC прямоугольный. Его катеты $AB = 2MB = 16$, $BC = 2BN = 30$, а гипотенуза $AC = 34$. Тогда искомый периметр равен 80.

7. Маша и Саша делят между собой ягоды, собранные ими в лесу. Вначале, Маша берет 15 ягод, далее дети берут ягоды по очереди, причем каждый берет ровно на одну ягоду больше, чем предыдущий. Если количество ягод, которое ребенок должен взять, превышает количество ягод в куче, он берет все оставшиеся ягоды. В конце дележа у Маши оказалось 1012 ягод. Сколько ягод было в куче?

   Ответ. 2012

   Решение. Каждый следующий ход Маша берет на две ягоды больше, чем в предыдущий. То есть на k-ом ходе она берет $a_k = 15 + (k-1) \cdot 2$ ягоды. А всего за n таких ходов Маша берет
   $$S_n = 15n + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 + 14n$$
   ягод. Заметим, что $S_{25} = 975 < 1012$, $S_{26} = 1040 > 1012$. Это означает, что Маша сделала 15 хода, и Саша сделал 25 ходов, после чего Маша забрала оставшиеся ягоды. За 25 ходов Саша заберет на 25 ягод больше, чем Маша за 25 ходов, то есть 1000. Значит всего ягод было $1000 + 1012 = 2012$.

8. Площади оснований усеченной пирамиды равны 12 и 75, а высота равна 21. Найдите ее объем.

   Ответ. 819

   Решение. Основания усеченной пирамиды – подобные многоугольники. Коэффициент подобия $k = \sqrt{\frac{75}{12}} = \frac{5}{2}$. Поэтому высоты изначальной и отрезанной пирамиды относятся как $\frac{H}{h} = k = \frac{5}{2}$. То есть $H = \frac{5h}{2}$. Но по условию $H - h = 21$. Поэтому $h = 14$, $H = 35$. Отсюда, искомый объем равен
   $$V = \frac{1}{3} \cdot 75 \cdot 35 - \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 14 = 875 - 56 = 819.$$

9. "Жигули" и "Москвич" одновременно выехали из поселка А в город Б и через 15 минут "Жигулям" оставалось доехать до города Б 40 км, а "Москвичу" 50 км. Через сколько минут после "Жигулей" приехал в город Б "Москвич", если скорость "Москвича" составляет 60 % от скорости "Жигулей"?

   Ответ. 26

Решение. Через 15 минут расстояние между “Жигулями” и “Москвичом” составило 10 км. Значит, разность их скоростей – 40 км/час. Но эта разность – 40 % от скорости “Жигулей”. Получаем, что скорость “Жигулей” – 100 км/час, а “Москвича” – 60 км/час. То есть “Жигулям” осталось ехать $\frac{40}{100} = 0,4$ часа $= 24$ минуты, а “Москвичу” – $\frac{50}{60}$ часа $= 50$ минут. То есть в город Б “Москвич” приедет через $50 - 24 = 26$ минут после “Жигулей”.

10. Какое количество натуральных чисел a обладает следующим свойством: “Наименьшее общее кратное чисел 16, 50 и a равняется 1200”?

Ответ. 15

Решение. Заметим, что $16 = 2^4$, $50 = 5^2 \cdot 2$, $1200 = 5^2 \cdot 3 \cdot 2^4$. Это означает, что в числе a множитель 3 будет ровно в первой степени, а степени чисел 5 и 2 могут быть любыми, не превосходящими 2 и 4 соответственно. То есть для множителя 5 есть три возможности, а для 2 – пять. Итого получается $3 \cdot 5 = 15$ вариантов.

11. Пропускная способность большой трубы на 9 м^3/ч больше, чем маленькой трубы. Известно, что 16 маленьких труб могут наполнить бассейн на пять часов быстрее, чем одна большая труба. Найдите, какой наименьший объем (в кубических метрах) может быть у бассейна.

Ответ. 80

Решение. Пусть объем бассейна V м^3, скорость наполнения маленькой – x м^3/ч, а большой – $x + 9$ м^3/ч. Тогда

$$\frac{V}{16x} + 5 = \frac{V}{x+9}.$$

Откуда $V(x) = \dfrac{5}{\dfrac{1}{x+9} - \dfrac{1}{16x}} = \dfrac{80(x^2+9x)}{3(5x-3)}$. Найдем производную:

$$V'(x) = \frac{80}{3} \cdot \frac{(2x+9)(5x-3) - 5(x^2+9x)}{(5x-3)^2} = \frac{80}{3} \cdot \frac{5x^2 - 6x - 27}{(5x-3)^2}.$$

Производная равна нулю при $5x^2 - 6x - 27 = 0$. Положительный корень производной, при котором достигается минимум

$$x = \frac{3 + \sqrt{9+135}}{5} = \frac{3+12}{5} = 3.$$

При этом $V = \dfrac{80 \cdot (9+27)}{3 \cdot (15-3)} = 80$.

12. Найдите число $\overline{ab}$, если известно, что число

$$\overline{\underbrace{2011\ldots2011}_{101\text{ раз}}a2011b\underbrace{2011\ldots2011}_{101\text{ раз}}}$$

делится на 99.

Ответ. 61

Решение. По признакам делимости на 9 и 11 имеем: $a+b$ дает остаток 7 при делении на 9, а $b-a$ дает остаток 6 при делении на 11. Так как a и b – цифры, имеем: $a+b=7$ или $a+b=16$, и $b-a=6$ или $b-a=-5$. Так как сумма и разность чисел имеют одинаковую четность, возможны два варианта: $a+b=7$, $b-a=-5$, откуда $b=1$, $a=6$; $a+b=16$, $b-a=6$, откуда $b=11$, $a=5$ – что невозможно.

13. Дан треугольник ABC, у которого высота, проведенная к стороне BC, в два раз меньше этой стороны, а высота, проведенная к стороне AC, в 32 раза меньше этой стороны. Найдите синус угла C.

Ответ. 0,125

Решение. Обозначим высоты AK и BM. Тогда $BC = 2AK$, $AC = 32BM$. Удвоенная площадь треугольника ABC равна

$$2S = BC \cdot AK = AC \cdot BM = 2AK \cdot AK = 32BM \cdot BM.$$

Откуда $AK^2 = 16BM^2$, то есть $AK = 4BM$. Пусть $BM = x$. Тогда $AK = 4x$, $BC = 8x$, $AC = 32x$. Тогда $2S = 32x^2$. С другой стороны,

$$2S = AC \cdot BC \cdot \sin\angle ACB = 256x^2 \cdot \sin\angle ACB.$$

Откуда $\sin\angle ACB = \dfrac{32}{256} = 0,125.$

14. В выходные дни в метро пассажиропоток уменьшается на 70%, а интервал между поездами увеличивается на 60%. На сколько процентов среднее количество человек в вагоне метро в выходные дни меньше, чем в рабочие дни?

Ответ. 52

Решение. Пусть в рабочие дни в вагоне метро в среднем ездит x человек, тогда в выходные ездит $x \cdot (1-0,7) \cdot (1+0,6) = 0,48x$. То есть среднее количество человек в вагоне метро в выходные дни на $100 - 48 = 52\%$ меньше, чем в рабочие дни.

15. Семь натуральных чисел выписаны в ряд. Каждое число, начиная с третьего, равняется сумме двух предыдущих чисел. Какое максимально возможное значение может принимать первое число, если последнее равняется 2012?

Ответ. 396

Решение. Пусть первое число равно x, а второе y. Тогда третье равно $x+y$, четвертое – $x+2y$, пятое – $2x+3y$, шестое – $3x+5y$, седьмое – $5x+8y$. Итак, $5x+8y=2012$. Если x максимально, то y – минимально. То есть нам нужно найти такое наименьшее y, чтобы число $2012-8y$ делилось на 5 (так как x натуральное). Числа $y=1,2,3$ не подходят. А при $y=4$ получаем ответ: $x=396$.

16. Известно, что сумма первых 12 членов геометрической прогрессии, состоящей из положительных чисел, равна 3003, а сумма обратных величин первых 12 членов этой прогрессии равна 1001. Найдите произведение первых 12 членов этой прогрессии.

Ответ. 729

Решение. Обозначим через a первый член прогрессии, а через q – ее знаменатель. Тогда по формуле суммы первых n членов геометрической прогрессии получаем, что

$$3003 = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{11} = \frac{a(q^{12}-1)}{q-1}.$$

Обратные величины $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aq}$, $\frac{1}{aq^2}$, $\ldots$, $\frac{1}{aq^{11}}$ к членам геометрической прогресии также образуют геометрическую прогрессию с первым членом $\frac{1}{a}$ и знаменателем $\frac{1}{q}$. Отсюда

$$1001 = \frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + \frac{1}{aq^2} + \ldots + \frac{1}{aq^{11}} = \frac{\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{1}{q^{12}}-1\right)}{\frac{1}{q}-1} = \frac{q^{12}-1}{q-1}\cdot\frac{1}{aq^{11}}.$$

Из этих выражений вытекает, что $a^2q^{11} = 3$. Произведение первых 12 членов прогрессии равно

$$P = a\cdot aq\cdot aq^2\cdot\ldots\cdot aq^{11} = a^{11}q^{1+2+\ldots+11} = a^{12}q^{66} = (a^2q^{11})^6 = 3^6 = 729.$$

17. Какую наибольшую площадь может иметь треугольник, две медианы которого равны 3 и 7?

Ответ. 14

Решение. Пусть в треугольнике ABC медианы $AM = 7$, $BN = 3$, L – точка пересечения медиан. Заметим, что три медианы разбивают треугольник на шесть треугольничков равной площади. Поэтому $S_{ABC} = 6S_{BLM}$, но

$$S_{BLM} = \frac{1}{2}\cdot BL\cdot LM\cdot\sin BLM.$$

Так как медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины, то $BL = \frac{2}{3}\cdot BN = 2$, $LM = \frac{1}{3}\cdot AM = \frac{7}{3}$. Тогда

$$S_{ABC} = 6S_{BLM} = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{7}{3}\cdot\sin BLM = 14\cdot\sin BLM.$$

Площадь максимальна, когда $\sin BLM = 1$, то есть медианы перпендикулярны. Несложно показать, что такой треугольник существует. Значит, максимальная возможная площадь равна 14.

18. Фигура, заданная на координатной плоскости двойным неравенством $0 \leqslant x^2+y^2-4y \leqslant 10$ разрезается линиями, задаваемыми уравнением $(x+2-y)(\sqrt{3}ax+y-2)=0$ на несколько частей. Найдите наибольшее число a, при котором площадь наименьшей части относится к площади наибольшей части как $5:7$.

Ответ. 1

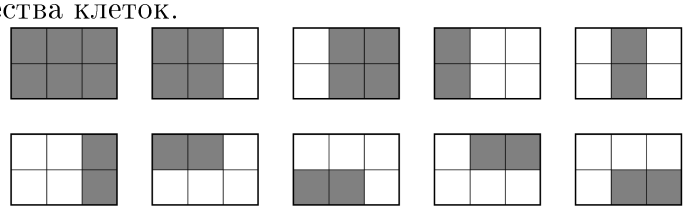
Решение. Первое двойное неравенство задает кольцо с центром в точке $(0;2)$. Второе уравнение задает пару прямых $y=x+2$ и $y=-\sqrt{3}ax+2$, пересекающихся в той же точке $(0;2)$. Таким образом, угол между этими прямыми должен равняться $\frac{5\pi}{12}$. Для угла наклона второй прямой имеется две возможности: $\varphi=\frac{\pi}{4}\pm\frac{5\pi}{12}$. При $\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}$ угловой коэффициент $-\sqrt{3}a=-\sqrt{3}$, то есть $a=1$. При $\varphi=\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{12}=-\frac{\pi}{16}$ имеем $-\sqrt{3}a=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $a=\frac{1}{3}$. Наибольшее $a=1$.

19. Каждая сторона равностороннего треугольника разбита на 21 равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбит на 441 треугольничков. Назовем цепочкой последовательность треугольничков, в которой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное количество треугольничков в такой цепочке?

Ответ. 421

Решение. Рассмотрим раскраску треугольничков в два цвета (черный и белый) такую, что соседние по стороне треугольнички окрашены в разные цвета, и угловые треугольнички покрашены в черный цвет. Заметим, что всего получится $1+2+\ldots+21=231$ черных треугольничков и 210 белых. Заметим, что в рассматриваемых цепочках цвета треугольничков чередуются. В таких цепочках количество черных и белых треугольничков различается не больше чем на единицу. Поэтому всего в цепочке не более 210 белых и 211 черных треугольничков. Пример такой цепочки с 421 треугольничком, проходящей через все белые треугольнички, нарисовать несложно.

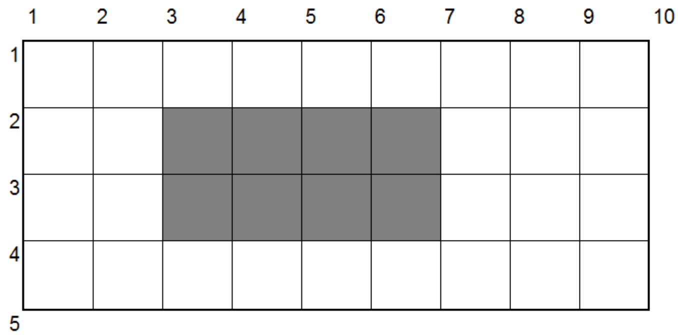
20. В клетчатом прямоугольнике 2×3 можно выделить десять прямоугольников, состоящих из четного количества клеток.



А какое количество прямоугольников, содержащих четное число клеток, можно выделить в клетчатом прямоугольнике 4×9?

Ответ. 300

Решение. Пронумеруем горизонтальные и вертикальные линии сетки так, как показано на рисунке.



Будем каждый прямоугольник обозначать двумя парами чисел – номерами горизонтальных и вертикальных линий сетки, ограничивающих его. Например, указанный на рисунке прямоугольник будет $(2-4; 3-7)$.

Количество способов выбрать пару горизонтальных линий $C_5^2 = 10$. При этом пар горизонтальных линий, задающих вертикальные стороны нечетной длины будет $3 \cdot 2 = 6$, так как одна из линий должна быть нечетной (три варианта), а вторая – четной (два варианта). Значит, пар горизонтальных линий, задающих вертикальные стороны четной длины будет $10 - 6 = 4$.

Количество способов выбрать пару вертикальных линий $C_{10}^2 = 45$. При этом пар вертикальных линий, задающих горизонтальных стороны нечетной длины будет $5 \cdot 5 = 25$. Значит, пар вертикальных линий, задающих горизонтальных стороны четной длины будет $45 - 25 = 20$.

Прямоугольник будет содержать четное число клеток в одном из трех случаев:

1) Обе стороны четны: $4 \cdot 20 = 80$ прямоугольника.

2) Вертикальная сторона четная, а горизонтальная – нечетная: $4 \cdot 25 = 100$ прямоугольника.

3) Вертикальная сторона нечетная, а горизонтальная – четная: $6 \cdot 20 = 120$ прямоугольника.

Итого, скомое количество прямоугольников $80 + 100 + 120 = 300$.

21. Натуральные числа a, b и c таковы, что

$$\begin{cases} ab + bc + ca + 1,5 \cdot (a + b + c) = 7039, \\ 2abc - a - b - c = 2008. \end{cases}$$

Найдите наименьшее значение $a + b + c$.

Ответ. 2012

Решение. Умножим первое уравнение на 2 и прибавим ко второму. Получим

$$2(ab + bc + ca + abc + a + b + c) = 16086,$$

то есть

$$ab + bc + ca + abc + a + b + c = 8043.$$

Добавим слева и справа единицу. Разложив левую часть на множители, получим

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8044 = 2 \cdot 2 \cdot 2011$$

(2011 – простое число). А так как a, b и c натуральные, то единственное решение – это тройка чисел 1, 1 и 2010 (с точностью до перестановки). Легко проверить, что указанные числа удовлетворяют каждому из уравнений системы. Искомая сумма равна 2012.

22. Внутри треугольника ABC расположены такие точки D, E и F, что точка D лежит на отрезке AE, точка E лежит на отрезке BF, точка F лежит на отрезке CD. Известно, центр окружности Ω, описанной вокруг треугольника ABC, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник DEF. Также дано, что $\angle DFE = 90^\circ$, $DE/EF = 5/3$, радиус окружности Ω равен 6, а отношение площадей $S(ABC)/S(DEF) = 12,8$. Найдите DF.

    Ответ. 3

    Решение. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника DEF (по условию I – также центр окружности Ω), а K, L, M – проекции I на DE, EF, FD соответственно. Положим $DE = 5x$, $EF = 3x$, тогда $FD = 4x$. Из формулы радиуса вписанной окружности в прямоугольный треугольник DEF находим, что $IK = IL = IM = x$. Положим $kx = \sqrt{6^2 - x^2} = AK = BL = CM$, то есть $x^2(k^2 + 1) = 36$.

    Пусть $s = S(DEF)$. Запишем равенство

$$12,8 = \frac{S(ABC)}{s} = \frac{S(DEF)}{s} + \frac{S(ABE)}{s} + \frac{S(BFC)}{s} + \frac{S(ADC)}{s} =$$

$$= 1 + \frac{AE \cdot BE}{DE \cdot FE} + \frac{BF \cdot CF}{EF \cdot DF} + \frac{CD \cdot AD}{FD \cdot ED} =$$

$$= 1 + \frac{(k+2)\cdot(k-2)}{5 \cdot 3} + \frac{(k+1)\cdot(k-1)}{3 \cdot 4} + \frac{(k+3)\cdot(k-3)}{4 \cdot 5} =$$

$$= \frac{k^2+1}{5} = \frac{36}{5x^2},$$

    откуда $x = \frac{6}{\sqrt{64}} = \frac{3}{4}$ и $DF = 4x = 3$.

23. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ ($ABCD$ – квадрат) и прямой круговой цилиндр Z высоты 17, основания которого ограничивают окружности ω_1 и ω_2. Известно, что вершины A и B лежат на окружности ω_1, вершины C и D – на окружности ω_2, а вершина S – на боковой поверхности цилиндра Z и удалена от плоскости окружности ω_2 на расстояние 10. Найдите квадрат радиуса цилиндра.

    Ответ. 76,5

    Решение. Через середины K и L ребер AB и CD проведем плоскость α, перпендикулярную AB. Плоскость α содержит ось цилиндра и точку S; сечение цилиндра Z плоскостью α – прямоугольник $XYZT$, где $K \in XY$, $L \in ZT$, $S \in TX$, а прямая, проходящая через середины P и Q отрезков XY и ZT – ось цилиндра.

    Используем следующие условия, которые следуют из того, что пирамида $SABCD$ правильная.

    1) $AB = CD \Leftrightarrow AK^2 = DL^2 \Leftrightarrow PA^2 - PK^2 = QD^2 - QL^2 \Leftrightarrow R^2 - PK^2 = R^2 - QL^2 \Leftrightarrow PK = QL$, где R – радиус основания цилиндра, и можно обозначить $x = PK = QL$.

2) $SK = SL \Leftrightarrow SK^2 = SL^2 \Leftrightarrow SX^2 + XK^2 = ST^2 + TL^2$. Заметим, что $XK = XP \pm PK = R \pm x$ и $TL = TQ \pm QL = R \pm x$. Но поскольку $ST = 10 > 17 - 10 = 7 = SX$, то $XK > TL$, поэтому единственная возможность – когда $XK = R + x$ и $TL = R - x$. Теперь равенство $SK^2 = SL^2$ запишется как $SX^2 + XK^2 = ST^2 + TL^2 \Leftrightarrow 49 + (R + x)^2 = 100 + (R - x)^2 \Leftrightarrow 4Rx = 51$.

3) $KL = AD = AB \Leftrightarrow KL^2 = AB^2 \Leftrightarrow PQ^2 + (2x)^2 = 4AK^2 \Leftrightarrow 17^2 + 4x^2 = 4(R^2 - x^2) \Leftrightarrow 8x^2 = 4R^2 - 289$.

Исключая x из (2) и (3), имеем:

$$8 \cdot \left(\frac{51}{4R}\right)^2 = 4R^2 - 289 \quad \Leftrightarrow \quad 8R^4 - 578R^2 - 2601 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение относительно R^2, выбираем положительный корень, получаем:

$$R^2 = \frac{289 + \sqrt{289^2 + 8 \cdot 2601}}{8} = \frac{17}{8} \cdot (17 + \sqrt{17^2 + 8 \cdot 9}) =$$
$$= \frac{17}{8} \cdot (17 + \sqrt{361}) = \frac{17}{8} \cdot 36 = 76,5.$$

24. Сколькими способами можно выложить в ряд три красных, четыре синих и пять зеленых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?

Ответ. 7056

Решение. Сначала разложим красные и зеленые шары. Для этого надо выбрать три места из восьми для красных шаров. Между ними (а также слева и справа) остается девять мест, куда нужно разместить синие шары. Из этих мест надо выбрать четыре. Итого получается

$$C_8^3 \cdot C_9^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 56 \cdot 126 = 7056.$$

25. При каком наименьшем натуральном $n > 1$ верно утверждение: из любых n натуральных чисел можно выбрать два, разность квадратов которых делится на 399?

Ответ. 81

Решение. **Лемма 1.** Пусть p_1, p_2, p_3 – различные простые числа. Тогда для любого набора (a_1, a_2, a_3) целых чисел таких, что $0 \le a_1 < p_1$, $0 \le a_2 < p_2$, $0 \le a_3 < p_3$ существует ровно одно число k такое, что $0 \le k < p_1p_2p_3$ и остаток от деления k на p_1 равен a_1, остаток от деления k на p_2 равен a_2, остаток от деления k на p_3 равен a_3.

Доказательство. Всего есть ровно $p_1p_2p_3$ чисел от нуля до $p_1p_2p_3 - 1$, и ровно $p_1p_2p_3$ наборов (a_1, a_2, a_3), удовлетворяющих уловию. При этом если бы некоторому набору (a_1, a_2, a_3) соответствовало два число k_1 и k_2, то разность $k_1 - k_2$ делится на $p_1p_2p_3$ (так как эти числа имеют одинаковые остатки при делении p_1, p_2 и p_3), что противоречит тому, что $0 \le k_1, k_2 < p_1p_2p_3$. Отсюда следует, что каждому набору соответствует ровно одно число.

Лемма 2. Квадраты натуральных чисел имеют ровно $\dfrac{p+1}{2}$ различных остатков при делении на простое число p.

Доказательство. Квадраты чисел a и b имеют одинаковые остатри при делении на p тогда и только тогда, когда разность $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ делится на p. Это значит, что либо у чисел a и b одинаковые остатки, либо остатки чисел a и b в сумме дают p. Поэтому квадраты натуральных чисел имеют ровно $\frac{p+1}{2}$ различных остатков при делении на p.

Перейдем непосредственно к решению задачи. Заметим, что $399 = 3 \cdot 7 \cdot 19$. Пусть существуют n чисел, квадраты которых имеют различные остатки при делении на 399. Из леммы 2 следует, что квадраты имеют 2 различных остатка при делении на 3; 4 остатка при делении на 7; и 10 остатков при делении на 19. Из леммы 1 следует, что каждому из $2 \cdot 4 \cdot 10 = 80$ допустимых наборов остатков (a_1, a_2, a_3) от деления квадрата на 3, 7, 19 соответствует не более одного из наших n чисел. Значит, если $n > 80$ то нельзя найти n чисел, квадраты которых имеют различные остатки при делении на 399.

Осталось привести пример для $n = 80$. Из доказательства леммы 2 следует квадраты чисел с остатками 0 и 1 при делении на 3 дают разные остатки при делении на 3, квадраты чисел с остатками 0, 1, 2, 3 и 4 при делении на 7 дают разные остатки при делении на 7, квадраты чисел с остатками 0, 1, 2, ... и 9 при делении на 19 дают разные остатки при делении на 19. Из леммы 1 следует, что существует 80 различных чисел от 0 до 398, соответствующих каждому из наборов (a_1, a_2, a_3), где $0 \leq a_1 \leq 1$, $0 \leq a_2 \leq 3$, $0 \leq a_3 \leq 9$. Эти 80 чисел очевидно подходят, так как квадраты любых двух, чисел соответствующих разным наборам имеют различные остатки при делении хотя бы на одно из чисел 3, 7, 19.