Дистанционный этап олимпиады "Физтех-2011"
10 класс. Решения задач

1. Находясь в гостях у Кролика, Винни-Пух за первый час съел 40% всего запаса меда Кролика, а Пятачок и Кролик вместе за это же время съели лишь 300 граммов меда. За следующий час Винни-Пух съел 80% от оставшегося меда, а Пятачок и Кролик съели 100 граммов меда на двоих. В итоге у Кролика осталось 800 грамм меда. Сколько килограммов меда было у Кролика до визита Винни-Пуха?

   Ответ. 8

   Решение. Пусть у Кролика было x килограммов меда. Тогда после первого часа осталось $0,6 \cdot 1000x - 300 = 600x - 300$ граммов меда. А после второго

$$0,2 \cdot (600x - 300) - 100 = 120x - 160.$$

   Поэтому $120x - 160 = 800$, то есть $x = \dfrac{960}{120} = 8$.

2. Сумма первых пяти членов арифметической прогрессии в 3 раза меньше суммы последующих пяти ее членов. Найдите третий член этой прогрессии, если седьмой член равен 52.

   Ответ. 20

   Решение. Пусть первый член прогрессии равен a, а разность прогрессии равна d. Тогда

$$3(a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)) = (a+5d)+(a+6d)+(a+7d)+(a+8d)+(a+9d).$$

   То есть

$$15a + 30d = 5a + 35d \quad \Leftrightarrow \quad 2a = d \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{d}{2}.$$

   Седьмой член прогрессии равен $a + 6d = \dfrac{13}{2}d$. Значит, $d = \dfrac{52}{13/2} = 8$. Поэтому $a = 4$. Отсюда получаем, что третий член последовательности равен $a + 2d = 20$.

3. Найдите значение выражения

$$\frac{x^2 - xy + 4x - 5y - 5}{x^2 - 4y^2} \cdot \frac{x^3 - 2x^2y - 5x^2 + 10xy + 25x - 50y}{x^3 + 125}$$

   при $x = 5,4$ и $y = 2,3$.

   Ответ. 0,21

   Решение. Преобразуем данное выражение:

$$\frac{x^2 - xy + 4x - 5y - 5}{x^2 - 4y^2} \cdot \frac{x^3 - 2x^2y - 5x^2 + 10xy + 25x - 50y}{x^3 + 125} =$$

$$= \frac{x^2 - xy - x + 5x - 5y - 5}{(x - 2y)(x + 2y)} \cdot \frac{x(x^2 - 5x + 25) - 2y(x^2 - 5x + 25)}{(x + 5)(x^2 - 5x + 25)} =$$

$$= \frac{x(x-y-1)+5(x-y-1)}{(x-2y)(x+2y)} \cdot \frac{(x-2y)(x^2-5x+25)}{(x+5)(x^2-5x+25)} =$$
$$= \frac{(x+5)(x-y-1)(x-2y)(x^2-5x+25)}{(x-2y)(x+2y)(x+5)(x^2-5x+25)} =$$
$$= \frac{x-y-1}{x+2y} = \frac{5,4-2,3-1}{5,4+4,6} = \frac{2,1}{10} = 0,21.$$

4. Известно, что параболы $y = x^2 + bx + c$ и $y = -x^2 + px + q$ пересекаются в точке $(1;1)$. Проекция вершины второй параболы на ось x на 4 правее, чем проекция вершины первой параболы на эту же ось. Одна из точек пересечения первой параболы с осью x – $(2;0)$. Найдите коэффициент q.

   Ответ. -10

   Решение. Из первого условия следует, что $1+b+c = -1+p+q = 1$. Второе условие означает, что $\frac{p}{2} = -\frac{b}{2}+4$. А третье условие можно переписать как $4+2b+c = 0$. Получаем систему из четырех уравнений:
$$\begin{cases} b+c=0; \\ p+q=2; \\ b+p=8; \\ 2b+c=-4. \end{cases}$$
   Из первого и последнего равенства получаем $b = -4$. Из третьего $p = 12$. Из второго $q = -10$.

5. На доске выписали в порядке возрастания все натуральные числа от 1 до 10000, а потом стерли те, которые не делятся ни на 4, ни на 15. Какое число оказалось на 2017-м месте?

   Ответ. 6724

   Решение. Рассмотрим первые 60 чисел. Из них останутся 15 чисел, делящихся на 4, и 4 числа, делящихся на 15. Но при этом число 60 учтено дважды. Значит останется 18 чисел. Аналогично, из чисел от 61 до 120 останется 18 чисел и т.д.

   Разделим 2017 на 18 с остатком:
$$2017 = 112 \cdot 18 + 1.$$
   Поэтому на 2016-том месте будет стоять $112 \cdot 60 = 6720$, а на 2017-том – следующее оставшееся число, то есть 6724.

6. Две стороны треугольника равны 34 и 32, а медиана, проведенная к третьей, равна 17. Найдите площадь треугольника.

   Ответ. 480

   Решение. Пусть данный треугольник – ABC, $AB = 34$, $BC = 32$, медиана $BM = 17$. Пусть N – середина AB. Тогда MN – средняя линия треугольника ABC, поэтому $MN = 16$.

Кроме того $BN = \dfrac{AB}{2} = 17$. Значит, треугольник MNB равнобедренный. Его высота, опущенная на основание MN, находится по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{17^2 - \left(\frac{16}{2}\right)^2} = 15.$$

Значит, площадь треугольника MNB равна $\dfrac{16 \cdot 15}{2} = 120$. Осталось заметить, что площадь треугольника ABC в четыре раза больше.

7. При каком натуральном значении n числа n, $n+15$, $46n-30$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

Ответ. 3

Решение. Из характеристического свойства геометрической прогрессии следует, что

$$(n+15)^2 = n(46n-30) \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 30n + 225 = 46n^2 - 30n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 45n^2 - 60n - 225 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3n^2 - 4n - 15 = 0.$$

Поэтому $n = 3$ или $n = -\dfrac{5}{3}$. Но нас интересуют лишь натуральные n.

8. Два велосипедиста выезжают навстречу друг другу из двух городов, расстояние между которыми 240 километров. Если первый выедет на 4,5 часа раньше второго, то он встретит второго велосипедиста через 7,5 часа после своего выезда. Если второй выедет на 1 час раньше первого, то он встретит первого велосипедиста через 6 часов после своего выезда. С какой скоростью (в км/ч) едет каждый велосипедист?

Ответ. 24; 20

Решение. Пусть v_1 и v_2 – искомые скорости. Тогда

$$\begin{cases} 7,5v_1 + (7,5-4,5)v_2 = 240; \\ (6-1)v_1 + 6v_2 = 240; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 7,5v_1 + 3v_2 = 240; \\ 5v_1 + 6v_2 = 240; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 10v_1 = 240; \\ 4v_2 = 80. \end{cases}$$

Отсюда $v_1 = 24$, а $v_2 = 20$.

9. Сколько различных целых значений принимает функция $17\sin x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$?

Ответ. 32

Решение. Область определенения функции $x \neq \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. На области определения функция совпадает с $17\sin x + 1$. Поэтому множество значений исходной функции $E = (-16; 1) \cup (1; 18)$, то есть содержит 32 целых значения.

10. На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырехугольников с вершинами в этих точках?

Ответ. 1200; 2970

Решение. Треугольники бывают двух типов: с двумя вершинами на первой прямой и с одной на второй, и наоборот. Из 10 точек выбрать две можно $\dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45$ способами. Поэтому треугольников первого типа $45 \cdot 12 = 540$ штук. Аналогично, треугольников второго типа $\dfrac{12 \cdot 11}{2} \cdot 10 = 660$ штук. Итого, 1200 треугольников.

Четырехугольники же однозначно задаются четырьмя вершинами, две из которых на одной прямой, и еще две – на другой. Значит, всего различных четырехугольников

$$\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{12 \cdot 11}{2} = 45 \cdot 66 = 2970.$$

11. Числа a, b и c таковы, что $a+b+c=13$ и $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=0,4$. Найдите значение выражения $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$.

Ответ. 2,2

Решение. Перемножив исходные равенства, получим

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}=5,2$$

или

$$3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=5,2.$$

Из последнего равенства получаем ответ.

12. Простые числа p, q, r таковы, что $p+q+r=118$, $pq+qr+rp=2075$. Найдите произведение pqr.

Ответ. 3686

Решение. Так как сумма трех целых чисел четна, то они не могут быть все нечетными. Единственное четное простое число – это 2. Пусть, например, $r=2$ (очевидно, что все переменные равноправны). Тогда условие примет вид:

$$\begin{cases} p+q+2=118; \\ pq+2p+2q=2075; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q=116; \\ pq+2(p+q)=2075; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q=116; \\ pq=1843. \end{cases}$$

Так как $pq=1843$, а $r=2$, то $pqr=3686$.

Можно было и не раскладывать 1843 на простые множители, а просто выразить в первом уравнении q через p, подставить во второе, и решить квадратное уравнение на p.

13. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены соответственно точки D, E и F так, что прямая DF параллельна стороне BC. Найдите площадь четырехугольника $ADEF$, если площади треугольников ABC и ADF равны 150 и 6 соответственно.

Ответ. 30

Решение. Так как прямая DF параллельна стороне BC, то треугольники ADF и ABC подобны. Коэффициент подобия равен

$$k = \sqrt{\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABC}}} = \sqrt{\frac{6}{150}} = \frac{1}{5}.$$

Поэтому $DF = \dfrac{BC}{5}$, и высота треугольника ADF, опущенная на сторону DF, равна $\dfrac{h}{5}$, где h – высота треугольника ABC, опущенная на BC. Тогда высота треугольника EDF, опущенная на сторону DF, равна $h - \dfrac{h}{5} = \dfrac{4}{5}h$. Значит, площадь треугольника EDF равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{5} \cdot \frac{4}{5}h = \frac{4}{25} S_{\triangle ABC} = 24.$$

Площадь же четырехугольника $ADEF$ равна сумме площадей треугольников ADF и EDF.

14. Отец и сын катаются на коньках по кругу с постоянными скоростями. Время от времени отец обгоняет сына. После того, как сын переменил направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 9 раз чаще. Во сколько раз отец бегает быстрее сына?

Ответ. 1,25

Решение. Пусть u и v – это соответственно скорости отца и сына, а L – длина одного круга. Тогда условие задачи можно переписать следующим образом

$$\frac{L}{u-v} = 9 \cdot \frac{L}{u+v} \quad \Leftrightarrow \quad u+v = 9(u-v) \quad \Leftrightarrow \quad 10v = 8u.$$

Поэтому $\dfrac{u}{v} = \dfrac{10}{8} = 1,25$.

15. Найдите наименьшее значение выражения

$$3\sin^2\alpha + 7\cos^2\alpha + 8\sin^4\alpha + 12\cos^4\alpha.$$

Ответ. 9,2

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$3\sin^2\alpha + 7\cos^2\alpha + 8\sin^4\alpha + 12\cos^4\alpha =$$

$$= 3\sin^2\alpha + 7\cdot(1-\sin^2\alpha) + 8\sin^4\alpha + 12\cdot(1-\sin^2\alpha)^2 =$$

$$= 7 - 4\sin^2\alpha + 8\sin^4\alpha + 12\cdot(1 - 2\sin^2\alpha + \sin^4\alpha) =$$

$$= 20\sin^4\alpha - 28\sin^2\alpha + 19 = 20\cdot\left(\sin^2\alpha - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{92}{100}.$$

Так как $20\cdot\left(\sin^2\alpha - \frac{7}{10}\right)^2 \geqslant 0$ при всех α, и обращается в нуль при $\sin^2\alpha = \frac{7}{10}$, то наименьшее значение выражения равно $\frac{92}{100}$.

16. Найдите количество прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, таких что точка $(14;22)$ содержится внутри (но не на границе) каждого из них, абсциссы вершин являются натуральными числами меньше 29, а ординаты – натуральны и меньше, чем 31.

Ответ. 30576

Решение. Очевидно, что прямоугольник однозначно задают координаты его левого нижнего и правого верхнего углов. Пусть их координаты $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$. При этом x_1 – любое натуральное число от 1 до 13 (13 вариантов); y_1 – любое натуральное число от 1 до 21 (21 вариант); x_2 – любое натуральное число от 15 до 28 (14 вариантов); y_2 – любое натуральное число от 23 до 30 (8 вариантов). Итого, $13\cdot 21\cdot 14\cdot 8 = 30576$.

17. Найдите натуральное число, которое ровно в 25 раз меньше, чем сумма всех натуральных чисел, меньших его и делящихся на 31.

Ответ. 1581

Решение. Пусть наибольшее число, которое делится на 31 и меньше искомого, равно $31k$. Тогда искомое число n лежит в пределах от $31k+1$ до $31(k+1)$. Сумма всех натуральных чисел, меньших n и делящихся на 31, равна $31\cdot\frac{k(k+1)}{2}$. По условию

$$\frac{31k(k+1)}{2} = 25n \quad\Leftrightarrow\quad n = \frac{31k(k+1)}{50}.$$

Но $31k < n \leqslant 31(k+1)$. Поэтому $k+1 > 50$ и $k \leqslant 50$. Значит, $k = 50$, и $n = \frac{31\cdot 50\cdot 51}{50} = 1581$.

18. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 13$, $BC = 15$. Высота пирамиды имеет длину 6, а основание высоты попадает на прямую BC. Найдите площадь плоского сечения, проходящего через точку A параллельно прямой BC и делящего высоту пирамиды в отношении $3:2$, считая от вершины S?

Ответ. 18

Решение. По формуле Герона найдем площадь основания пирамиды:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{16\cdot 12\cdot 3\cdot 1} = 24.$$

Значит, высота AH треугольника ABC равна $\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{16}{5}$.

Пусть B' и C' – вершины получившегося сечения. Тогда $B'C' = \dfrac{3}{5}BC = 9$.

Пусть AH' – высота треугольника $AB'C'$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах треугольник AHH' прямоугольный. При этом отрезок HH' параллелен высоте пирамиды и равен $\dfrac{2}{5}$ от ее длины, то есть $HH' = \dfrac{12}{5}$. По теореме Пифагора

$$AH' = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = 4.$$

Поэтому $S_{\triangle AB'C'} = \dfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$.

19. Найдите наибольшее натуральное n, для которого число $6500!$ делится на каждое из чисел k^k при $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Напомним, что $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$.

Ответ. 82

Решение. Заметим, что $80^2 < 6500 < 81^2$. Значит $6500!$ точно делится на k^k при $k \leqslant 80$ (так как среди чисел от 1 до 6500 есть по крайней мере k чисел делящихся на k), и точно не делится на 83^{83} (так как 83 простое число, и среди чисел от 1 до 6500 меньше 83 чисел делящихся на 83, и нет ни одного, которое делится на 83^2). Осталось лишь проверить делится ли $6500!$ на 81^{81} и 82^{82}.

Среди чисел от 1 до 6500 более 2000 делятся на 3. Значит, $6500!$ делится на 3^{2000}, а 3^{2000} делится на $81^{81} = 3^{324}$.

Среди чисел от 1 до 6500 более 100 делятся на 41, и более 3000 делятся на 2. Значит, $6500!$ делится на $2^{3000} \cdot 41^{100}$, а $2^{3000} \cdot 41^{100}$ делится на $82^{82} = 2^{82} \cdot 41^{82}$.

20. 26 солдат выстроены в одну шеренгу. Сколько существует различных способов выбрать 11 из них так, что никакие двое из них не стоят рядом?

Ответ. 4368

Решение. Наденем на те 11 солдат, которых мы выбрали, красные шапочки, а на остальных – синие. Выведем из шеренги солдат в красных шапочках. Останется 15 солдат в синих шапочках.

Посчитаем количество способов восстановить шеренгу. Между двумя синими (равно как и по краям шеренги) более одного красного стоять не может. Поэтому нам нужно из 16 мест (14 между синими и два места по краям) выбрать 11, куда поставить красных. Итого, $C_{16}^{11} = \dfrac{16!}{11! \cdot 5!} = 4368$.